

Athanasius Kircher

Musurgia universalis sive Ars magna consoni et dissoni

Buch IV

Übersetzung: Günter Scheibel

Revision: Jacob Langeloh unter Mitarbeit von Frank Böhling

hrsg. von Markus Engelhardt und Christoph Hust

Inhaltsverzeichnis zu Buch IV

Die Seitenzahlen beziehen sich auf den lateinischen Text.

	Vorrede	159
Kapitel I	Wie man eine Konsonanz teilen kann	160
Kapitel II	Das Monochord	160
Kapitel III	Die geometrische Reihe und ihr Nutzen bei der Fortsetzung von Konsonanzen und Dissonanzen ins Unendliche	161
	Pragmatia I	162
	Pragmatia II	162
	Kanon I Oktaven bis ins Unendliche multiplizieren	165
	Kanon II Multiplikation der anderen Konsonanzen wie auch der Dissonanzen, die in der Proportio particularis bestehen, bis ins Unendliche	166
	Kanon III Wie man die Stufen oder die Intervalle von aufgeschichteten Oktaven findet	167
	Corollarium I	170
	Corollarium II	170
Kapitel IV	Die einfache geometrische Teilung	170
	Proposition I Eine gespannte Saite soll so geteilt werden, dass ein Teil zum anderen in der Oktave klingt	171
	Proposition II Eine Quinte auf der Saite bestimmen	172
	Proposition III Wie man auf der Saite die Quarte bestimmt	172
	Proposition IV Wie man die große Terz auf der Saite bestimmt	173
	Proposition V Wie man auf der Saite die kleine Terz bestimmt	173
	Proposition VI Wie man auf der Saite die große Sexte bestimmt	174
	Proposition VII Wie man die kleine Sexte auf der Saite bestimmt	174
	Proposition VIII Wie man die Oktave mit großer Terz auf der Saite bestimmt	175
	Proposition IX Wie man die Oktave mit kleiner Terz auf der Saite bestimmt	175
	Proposition X Wie man die Oktave mit Quarte auf der Saite bestimmt	175
	Proposition XI Wie man die Oktave mit Quinte oder die Duodezime auf der Saite bestimmt	176
	Proposition XII Wie man die Oktave mit großer Sexte oder die Tredezime auf der Saite bestimmt	176
	Proposition XIII Wie man die Doppeloktave oder Quindezime auf der Saite bestimmt	177
	Proposition XIV Wie man den großen Ganzton oder die vollkommene Sekunde auf der Saite bestimmt	177

Proposition XV	Wie man den kleinen Ganzton auf der Saite bestimmt	177
Proposition XVI	Wie man den großen Halbton auf der Saite bestimmt	178
Proposition XVII	Wie man den kleinen Halbton oder die diatonische Diësis auf der Saite bestimmt	178
Proposition XVIII	Wie man das Diaschisma oder die Hälfte eines kleinen Halbtons auf der Saite bestimmt	178
Proposition XIX	Wie man das Komma auf der Saite bestimmt	179
Proposition XX	Wie man die Apotome auf der Saite bestimmt	179
Proposition XXI	Wie man das pythagoreische Limma auf der Saite bestimmt	179
Proposition XXII	Wie man die enharmonische Diësis auf der Saite bestimmt	179
Proposition XXIII	Eine andere Art der Teilung des Monochords	180
Kapitel V	Die Teilung des Monochords oder die harmonische Algebra	181
Proposition I	Wie man eine beliebige Zahl so teilt, dass die Teile 2 : 1 ergeben, die Konsonanz der Oktave	181
Proposition II	Wie man eine beliebige Zahl so teilt, dass die Teile sich verhalten wie 3 : 1, die Oktave mit Quinte	182
Proposition III	Wie man eine beliebige Zahl so teilt, dass die Teile in der Doppeloktave erklingen, die in der Proportion 4 : 1 steht	182
Proposition IV	Wie man eine beliebige Zahl so in zwei teilt, dass die Teile in der Konsonanz der Quinte 3 : 2 erklingen	182
Proposition V	Wie man eine beliebige Zahl so teilt, dass die Teile die Konsonanz der großen Terz 4 : 5 ergeben	183
Proposition VI	Wie man eine beliebige Zahl so teilt, dass die Teile in der kleinen Terz 5 : 6 erklingen	183
Proposition VII	Eine gegebene Zahl so teilen, dass die Abschnitte in der großen Sexte erklingen, das heißt in der Proportio super-bipartiens tertias wie 5 : 3	183
Proposition VIII	Wie man eine gegebene Zahl so teilt, dass die Abschnitte im Ganzton erklingen, das heißt in der Proportio sesqui-octava 9 : 8	183
Proposition IX	Wie man eine beliebige Zahl in so viele Teile teilt, dass die Abschnitte jede beliebige gegebene musikalische Proportion ergeben	184
Corollarium I		185
Corollarium II		185
Kapitel VI	Das diatonische Monochord oder Konstruktion und Teilung eines diatonischen Monochords	185
Lemmata zur Harmonie: Die Teilung der harmonischen Intervalle		185
Lemma I		185
Lemma II		188
Proposition I	Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine Oktave ausmacht, in der Mitte teilt, ergibt sich als ein Teil die Quinte, als der andere die Quarte	190
Proposition II	Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine Quinte ausmacht, in zwei gleiche Teile teilt, wird der eine Teil eine große Terz, der andere die kleine Terz sein	190
Proposition III	Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine Quinte ausmacht, in drei gleiche Teile unterteilt, ergibt sich als erster Teil ein Ganzton, die anderen bilden gemeinsam eine Quarte	190

Proposition IV	Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine große Sexte ausmacht, in zwei gleiche Teile teilt, wird der eine Teil eine große Terz, der andere eine Quarte sein	190
Proposition V	Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine große Terz ausmacht, in zwei gleiche Teile teilt, wird ein Teil ein kleiner, der andere ein großer Ganzton sein	191
Proposition VI	Wenn man ein Intervall zwischen zwei Töne, das eine Oktave ausmacht, in drei gleiche Teile teilt, wird der erste Teil eine kleine Terz, der mittlere eine große Terz und der dritte eine Quarte sein	191
Proposition VII	Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine kleine Terz ausmacht, in drei gleiche Teile teilt, ergeben die ersten beiden gemeinsam einen großen Ganzton, der dritte einen großen Halbton	191
Proposition VIII	Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine kleine Sexte ausmacht, in drei gleiche Teile teilt, wird einer der Teile die kleine Terz, die anderen eine Quarte bilden	192
Proposition IX	Wie man eine mit Stegen richtig über ein Brett gespannte Saite passend als Tonleiter aufteilt	192
Kapitel VII	Beschreibung des diatonischen Monochords nach dem ptolemäischen System	193
Kapitel VIII	Teilung des diatonischen Monochords nach der Skala, oder: Das System der Doppeloktave oder der fünfzehn Saiten	195
I.	Bezeichnung des Tetrachords hypaton auf dem Monochord	195
II.	Wie man das Tetrachord meson auf dem Monochord bezeichnet	197
III.	Wie man das Tetrachord diezeugmenon auf dem Tetrachord bestimmt	197
IV.	Wie man das Tetrachord hyperboleon auf dem diatonischen Monochord aufteilt	197
V.	Die Aufteilung des Tetrachords synnemenon auf dem diatonischen Monochord	198
Kapitel IX	Die Teilung des Monochords im chromatischen Tongeschlecht	200
I.	Das chromatische Tetrachord hypaton	200
II.	Das chromatische Tetrachord meson	200
III.	Das chromatische Tetrachord diezeugmenon	200
IV.	Das chromatische Tetrachord hyperboleon	200
V.	Das chromatische Tetrachord synnemenon	201
Kapitel X	Die Teilung des Monochords im enharmonischen Tongeschlecht	201
	Corollarium I	201
	Corollarium II	203
	Corollarium III	203
Kapitel XI	Über ein Saitenteiler-Instrument, mit dem man jede beliebige Linie oder Saite sehr schnell in die dem chromatischen und enharmonischen Tongeschlecht entsprechenden Tonstufen teilen kann	203

Kapitel XII	Die geometrische Teilung jedes Intervalls in zwei oder mehr gleiche Teile	205
	Proposition I	Wie man zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zuordnet
		205
	Proposition II	Wie man zwischen zwei gegebenen Linien zwei mittlere Proportionale findet
		205
	Proposition III	Eine Linie finden, die ein gegebenes Intervall halbiert
		206
	Proposition IV	Wie man die mittleren Proportionale finden kann, welche den Ganz- und Halbton halbieren
		207
	Proposition V	Wie man die Oktave durch elf mittlere Proportionale in zwölf Halbtöne teilt
		207
Kapitel XIII	Ein zweiteiliges Instrument, mit dem man schneller jede beliebige Konsonanz geometrisch in zwei gleiche Teile teilen kann	208
	Proposition I	Einen Ton, eine Terz, Quarte, Quinte, ein Hexachord, eine Oktave, kurz: ein ganzes System halbieren
		208
	Corollarium	210

Bemerkungen zur Übersetzung:

Die Abbildungen stammen aus dem Exemplar der ETH-Bibliothek Zürich, Signatur: Rar 610. Persistente URL: <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-11653>. Im Wortlaut des Textes weicht dieses Exemplars in Details von dem des Faksimile (hrsg. von Ulf Scharlau im Olms-Verlag) ab.

In eckigen Klammern und grüner Schrift (<1>) ist die Seitenzählung der lateinischen Fassung gegeben. Alle Fußnoten sind editorisch ergänzt.



HOCHSCHULE
FÜR MUSIK UND THEATER
»FELIX MENDELSSOHN
BARTHOLDY«
LEIPZIG

Die Revision der Übersetzung erscheint als Kooperationsprojekt des Deutschen Historischen Instituts Rom – Musikgeschichtliche Abteilung / Istituto Storico Germanico di Roma – Sezione Storia della Musica und des Instituts für Musikwissenschaft der Hochschule für Musik und Theater »Felix Mendelssohn Bartholdy« Leipzig.

Alle Rechte an der Übersetzung sind vorbehalten.

Viertes Buch der Großen Kunst der Konsonanz und der Dissonanz

Geometrie **Die geometrische Teilung des Monochords**

Vorrede

Im vorigen Buch haben wir die Natur der harmonischen Zahlen, ihre Kräfte und ihre Fähigkeit, Affekte zu erzeugen, aufgezeigt. Wir haben ihre Verteilung in den Tetrachorden, ihren Gebrauch und ihre Verbindung dargelegt. Vorgelegt wurde der Aufbau der systematischen Skala, der durch diese Zahlen ausgeführt werden muss. Dargestellt wurde auch die Eigenart der harmonischen Zahl, die Einteilung in drei Tongeschlechter und in zwölf Modi. Jetzt bleibt noch übrig, dass wir uns ansehen, was die Geometrie für die Musik bedeutet. Im Vorhergehenden ist klar und deutlich geworden, dass die Musik nicht bloß der Arithmetik untergeordnet ist, sondern auch der Geometrie, insofern sie die klingende Linie [linea sonora] untersucht. Von welcher Art die klingende Linie ist, wie die Intervalle der musikalischen Proportionen mit ihrer Hilfe durch verschiedene Teilungen bestimmt werden können, das wollen wir in diesem Buch in größtmöglicher Varietät vorführen. Mit diesem Ziel vor Augen wollen wir nicht nur die Natur der musikalischen Proportionen durch geometrische Verfahren vorstellen, <160> sondern ebenso vor Ohren wie auch vor Augen stellen, wie mit Hilfe des Monochords die innersten Geheimnisse jedermann offenliegen. So sollen die Ohren die durch Saitenteilung korrekt entstandenen Intervalle der Konsonanzen beurteilen und die Augen eben dieser Teilung zustimmen. Und so sollen diese zwei Sinne, indem sie einander helfen und unterstützen, im Geiste die ersehnte Wissenschaft von der Musik hervorbringen. Damit wir aber keine Zeit mit überlangen Vorreden verlieren, lasst uns die Sache mit Gottes Hilfe in Angriff nehmen.

Kapitel I

Wie man eine Konsonanz teilen kann

Was die Rede von der Teilbarkeit der Konsonanzen besagt

Mit Recht könnte hier einer zweifelnd fragen, wie eine Konsonanz – da sie doch weder Zahl noch Proportion ist, sondern eher eine empfindbare Qualität [passibilis qualitas] – trotzdem wie eine kontinuierliche Quantität [quantitas continua], die teilbar ist, dem Zahlenverhältnis unterworfen sein kann.

Die Antwort lautet, dass eine Konsonanz nur akzidentiell [per accidens] teilbar ist, nicht an sich [per se]. Genauso, wie wir eine Farbe teilbar nennen gemäß der Oberfläche, auf der sie sich befindet, und das schwer oder leicht, je nach dem Körper, dem sie innewohnt, ebenso wird eine Konsonanz oder ein Klang nach Art der Saite oder irgendeines anderen Klangkörpers teilbar. Dieser Körper dient als Subjekt, das den Klang aufnimmt. Durch seine Eigenschaften werden seine akzidentiellen Bestandteile teilbar genannt. Dies glaubte ich hier kurz vorausschicken zu sollen, damit der wissbegierige Leser sich nicht gleich zu Anfang in Zweifeln verstrickt.

Da wir in den vorausgegangenen Teilen die Natur der klingenden Zahl behandelt haben, bleibt uns hier noch übrig zu erklären, wie die musikalischen Intervalle mit den Mitteln der Geometrie auf den Saiten gemessen werden, d. h. auf welche Art die einzelnen Konsonanzen auf dem Monochord benannt werden können. Damit man aber weiß, was ein Monochord eigentlich ist, wollen wir es im folgenden Kapitel ausführlich erklären.

Kapitel II

Das Monochord

Was das Monochord oder die harmonische Richtschnur ist

Ein Monochord ist nach der Etymologie nichts anderes als ein Musikinstrument, das mit nur einer Saite bestückt ist. Boethius nannte es mit Ptolemaios auch die »Regula harmonica« oder »harmonische Richtschnur«.

Was »magas« bei den Alten eigentlich heißt

Einige Griechen nannten es »Magas«, Steg [μαγάς]. Indem sie auf das Urteil der Vernunft vertrauten, gewannen sie aus dem harmonischen Verhältnis die wahren Proportionen der musikalischen Konsonanzen. Unter *Magas* versteht man gewöhnlich jenen halbrunden beweglichen Abschnitt, der die Töne auf der Saite bestimmt. Er ist nämlich nötig, dass eine Saite zwei Endpunkte hat (unendlich kann sie ja nicht sein), und diese beiden Endpunkte heißen »magades« [μαγάσδες]. So kam es, dass das Instrument, dem die *magas* angesetzt wurde, ebenfalls *Magas* genannt wurde. Laut Guido: »Μάγας Σάνις τετράγωνος υπόκυφος, δεχομένη ἐφ' ἑαυτῇ τὰς τῆς κιθάρας νευρὰς καὶ ἀποτελοῦσα φθόγγον«. Diese Worte scheint Guido wie folgt zu übersetzen: »Ein Monochord«, sagt er, »ist ein längliches

hölzernes Viereck, auf dem in einer Einkerbung eine Saite angebracht ist, durch deren Klang wir die unterschiedlichsten Töne wahrnehmen können«. Die Erklärung scheint von Guido eher gelehrt nach Maßgabe der Sache formuliert als nach der Eigenheit der griechischen Sprache. Daher vermute ich, dass er eine solche Erklärung eher von irgendeinem anderen Kenner des Griechischen gehört hat. Später hat er sie nicht in gleicher Weise vertreten.

Die Pectis unterscheidet sich von der Magas

Da die Liste der Bezeichnungen für Musikinstrumente bei den Griechen unendlich lang ist, ist die Verwirrung auch sonst groß. Mal steht »magas« für eine Flöte [fistula], mal für eine Kithara [eine Laute], selbst für die Pectis [eine Harfe]. Es ist aber zweifelhaft, ob Pectis und Magas dasselbe sind. Aristoxenos und Menaichmos behaupten, sie seien mit Sicherheit identisch, dem widersprechen (wohl mit Recht) Diogenes Tragicus und Phillis Delius.

<161> Athenaios weist im vierten Buch ex Sopater mit Recht darauf hin, dass die Pectis zweisaitig [διχόρδος] ist, im vierzehnten Buch ex Teleste nennt er aber die Magas fünfsaitig. Dass man auf ihr gleichzeitig hohe und tiefe Töne erzeugen kann [ἐν τούτῳ ὄξυν καὶ βάρυν φθόγγον], macht zweifelhaft, dass sie eine Flöte ist. So sagt Triphon bei dem Dichter Alexandrides: »Ich nenne die Magas groß und winzig zugleich« [μαγαδὶν λαλήσω μικρὸν ἅμα σοι καὶ μέγαν]. Pindar spricht von einem »antiphthongischen Psalm« [ψαλμὸν ἀντίφθογγον], weil Männer und unreife Knaben ihn in der Oktave gemeinsam gesungen haben, wie es auch der Ausspruch des Athenaios bestätigt: »διὰ τὸ δυό γενῶν ἅμα καὶ διαπασῶν ἔχεῖν τὴν συνωδίαν ἀνδρῶν καὶ παίδων«. Erasmus stellt in den *Adagia* klar, dass »μαγαδίζειν« [»magadisieren«] Pindars »Gegeneinanderklingen« [ἀντίφθογγον] sei, weil eine Saite, die zwischen zwei unbeweglichen Magas gespannt ist und durch ein unbewegliches Magas geteilt wird, zwei Töne hervorbringe. Damit stimmt überein, was wir eben zuvor gesagt haben.

Doch wollen wir diese Konfusion der Meinungen hinter uns lassen und sagen, dass Magas nichts anderes ist als die oben bezeichnete Halbkugel, welche eine Saite teilt, indem sie sie stützt. Deswegen wird sie bei Guido zu Recht als ein Gestell bezeichnet, das für eine Kithara oder Lyra [ἢ τῆς κυθάρας καὶ τῆς λύρας καβάλη] die Saiten stützt [τὰς νευρὰς β[α]στάζουσα]. »Halter« [retinaculum] nennt es Franchinus [Gaffurio], »kleine Brücken« [ponticulos] nennen es die Neueren, wir hingegen »Läufer für die Saitenteilung« [cursor chordotomon]. Dies kurz vorausgeschickt, werden wir, bevor wir weitergehen, zuerst in einigen Propositionen lehren, wie man die musikalisch-harmonischen Proportionen findet, und danach auch die Methoden aller Art für die Teilung des Monochords [erläutern]. Beginnen wir aber mit dem Einfacheren.

Kapitel III

Die geometrische Reihe [progressio] und ihr Nutzen bei der Fortsetzung von Konsonanzen und Dissonanzen ins Unendliche

Damit alle den Reichtum der Musikphilosophie klarer erkennen können, wollen wir hier einige Worte über das wunderbare Wesen der Progression bei den Harmonien vorausschicken. Um keine weitere Zeit zu verlieren, werden wir sogleich, wie man zu sagen pflegt, »vom Ei« die Sache ihren Anfang nehmen lassen.

Als Erstes lege ich zu Grunde, dass eine Folge geometrisch fortschreitet, wenn der Zahlenwert, von dem ausgehend die Folge verlaufen soll, mit der Benennung der Proportion multipliziert wird. Soll also eine Progressio dupla [doppelte Folge] ausgeführt werden, so multipliziert man 2 zuerst mit sich selbst und erhält 4. Dies wiederum mit 2 multipliziert ergibt 8, das mit 2 ergibt 16 und so weiter ad infinitum. Soll nun eine Proportio tripla [dreifache] fortgesetzt werden, multipliziert man 3, die Benennung der Proportion, mit sich selbst und erhält 9. Dies wiederum mit 3 multipliziert 27 ergibt und so weiter ad infinitum. Soll eine Proportio quadrupla [vierfache] ausgeführt werden, multipliziert man 4, die Benennung der Proportion, mit sich selbst und erhält 16. Dies wieder mit 4 multipliziert, ergibt 64 etc. Und so kann man beliebige vielfache Proportionen ins Unendliche führen.

Zweite Voraussetzung: Es ist eine Eigenheit der geometrischen Progression von drei Zahlen, dass das Produkt der ersten und der dritten Zahl immer gleich dem Quadrat der mittleren ist. Das wird an den Zahlen der Proportio dupla deutlich, 2, 4 und 8. Die erste Zahl mit der dritten multipliziert, ergibt 16, dasselbe wie 4 mit sich selbst multipliziert. Bei den Zahlen der Dreier-Progression (3, 9, 27) ergibt die erste Zahl mit der dritten multipliziert 81, dasselbe Ergebnis wie wenn man die mittlere mit sich selbst multipliziert.

Dritte Voraussetzung: Wenn vier Werte einer geometrischen Proportion gegeben sind, dann ist das Produkt der äußeren Glieder genau so groß wie das der inneren, wie an den Zahlen 2, 4, 8, 16 deutlich wird. Das Produkt der äußeren Zahlen (2×16) ergibt 32, ebenso das Produkt der inneren Zahlen (4×8). Genau das muss man bei allen anderen Zahlen feststellen, die in irgendeiner Proportion voran schreiten, was Euklid im siebten Buch, Satz 20 sehr schön beweist.

<162>

Pragmatia I

Die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression berechnen

Wenn in irgendeiner geometrischen Progression der Bezeichner der Proportion [denominator proportionis] zusammen mit ihrem kleinsten und ihrem größten Wert bekannt sind, können wir auf folgende Weise die Summe aller ihrer Glieder berechnen:

Man zieht das ersten Glied vom letzten ab und teilt das Ergebnis durch die Zahl, die um eins kleiner ist als der Bezeichner [denominator]. Wenn man zu diesem Quotienten die letzte Zahl bzw. das obere Ende addiert, setzt sich daraus die Summe aller Glieder zusammen. Beispiel in der folgenden Progression der Proportio quadrupla:

3, 12, 48, 192, 768, 3.720, 12.288, 49.152

49.152 weniger 3 gibt 49.149, das geteilt durch 3 ergibt als Quotient 16.383. Wenn man den zur letzten und größten Zahl addiert, erhält man 65.535, die Summe aller Zahlen der ganzen Folge.

Bei einer Proportion mit einer Progressio dupla erhält man die Summe aller Zahlen, wenn man die letzte Zahl verdoppelt und davon eins abzieht, wie bei diesem Beispiel:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512

512 verdoppelt ergibt 1.024, eins abgezogen ergibt 1.023, die Summe aller Zahlen der ganzen Progression.

Pragmatia II

Eigenheit der geometrischen Folge, die mit 1 beginnt

In jeder Folge, die mit 1 beginnt, erzeugt jede mit sich selbst multiplizierte Zahl eine Zahl, die von ihr den gleichen Abstand hat, wie ihr Abstand von der 1 ist. Jede beliebige Zahl, die mit einer anderen, größeren, multipliziert wird, bringt eine Zahl hervor, die von der größeren genau so weit entfernt ist, wie die kleinere von der 1. Das wird deutlich an dieser Progression der Proportio dupla:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1.024

Dabei erzeugt die Zahl 16 an fünfter Stelle, wenn sie mit sich selbst multipliziert wird, die Zahl 256, die von 16 aus ebenfalls die fünfte Stelle einnimmt, insgesamt aber die neunte. Das alles beweist Euklid im achten Buch, Satz 11. Damit man leichter erkennt, an welche Stelle man irgendeine multiplizierte Zahl stellen muss, ist hier die Progression der natürlichen Zahlen über die geometrische Progression geschrieben. Wie man oben als erste Zahl 0 schreiben und darunter die 1 setzen muss, so wird es auch danach in der folgenden Progression gemacht. Man sehe:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1.024	2.048

<163> Jede mit sich selbst multiplizierte Zahl der geometrischen Progression ergibt nämlich eine Zahl, die unterhalb derjenigen natürlichen Zahl steht, die doppelt so groß ist wie jene, die über der Zahl steht, die mit sich selbst multipliziert wird. Jede Zahl freilich, die mit einer anderen multipliziert wird, ergibt eine Zahl, die unter jene Zahl der natürlichen Reihe geschrieben werden muss, welche sich aus den Zahlen derer zusammensetzt, die miteinander multipliziert werden. Wenn man beispielsweise 32, die unter der 5 steht, mit

sich selbst multipliziert, erhält man 1.024, die unter der 10 steht, was das Doppelte der 5 ist, unter der wiederum 32 steht. Die Multiplikation 8×256 ergibt 2.048, die unter der 11 steht: weil nämlich 3, unter der die 8 steht, und 8, die über 256 steht, zusammen 11 ergeben. Daraus wird klar, wie wir die [Index-]Zahl jeder Stelle in der geometrischen Folge finden können, auch wenn wir nicht sämtliche Zahlen untereinandergeschrieben haben. Zuerst schreibt man vier, fünf oder noch mehr Zahlen in der natürlichen Progression auf, wie hier:

0	1	2	3	4	5	6
1	2	4	8	16	32	64

Will man etwa die Zahl finden, die bei der oben angesprochenen Progression an neunzehnter Stelle steht, so geht man wie folgt vor: Man multipliziere in diesem Beispiel 8 mit sich selbst und erhält 64, die Zahl auf dem siebten Platz. Darüber steht natürlich 6, die Zahl, die um eins kleiner ist als ihre Stelle. Das ist so, weil die Zahl über der 8 die 3 ist, welche verdoppelt 6 ergibt. Ferner erhält man, wenn man 8 mit 64 multipliziert, die Zahl 512, die an neunter Stelle gesetzt werden muss, weil 3 zu 6 addiert – also die Zahlen, die oben zu multiplizieren waren – 9 ergibt. Wenn man wiederum die Zahl 512 von der neunten Stelle mit sich selbst multipliziert, erhält man 262.144, die auf die achtzehnte Stelle gesetzt werden muss. Möchte man aber die Zahl auf der neunzehnten Stelle haben, multipliziert man 2, die Zahl, die unter 1 steht, mit 262.144, die unten auf der achtzehnten Stelle steht, und erhält mit dem Produkt 524.288 die gesuchte Zahl.

Doch wird das alles noch klarer anhand der algebraischen Progression.

Die algebraische Progression und ihr wunderbares Wesen

Das wunderbare Wesen der algebraischen Progression

Man schreibe die zwei vorher genannten Zahlenreihen, die eine der natürlichen Zahlen, die andere in geometrischer Progression in der Proportio dupla. Damit uns die Einzelheiten deutlicher werden, haben wir die Reihen hier senkrecht dargestellt. Es sind drei so angeordnete Reihen. Die erste ist die Reihe der natürlichen Zahlen, welche die Kenner der Algebra »Exponenten« nennen. In der zweiten Reihe stehen die Zeichen der algebraischen Potenzen. Die dritte Spalte enthält die geometrische Progression in der Proportio dupla, wo die cossischen Potenzen in Zahlen ausgedrückt sind.

Tabelle der Proportio dupla in der gebräuchlichen algebraischen Form

Exponentes	Figure Cossicæ	Progreß. duplæ proportionis	Nomina Cossica	Nomina Consonantie Diapason multiplicatæ
0	N	1	ad 1	Vnifonus siue diap.
1	R	2	ad 1	I. octaua
2	q	4	ad 1	II. octaua
3	c	8	ad 1	III. octaua
4	qq	16	ad 1	IV. octaua
5	ß	32	ad 1	V. octaua
6	qc	64	ad 1	VI. octaua
7	bß	128	ad 1	VII. octaua
8	qqq	256	ad 1	VIII. octaua
9	cc	512	ad 1	IX. octaua
10	qß	1024	ad 1	X. octaua
11	cß	2048	ad 1	XI. octaua
12	qqc	4096	ad 1	XII. octaua
13	Dß	8192	ad 1	XIII. octaua
14	qbß	16384	ad 1	XIV. octaua
15	cß	32768	ad 1	XV. octaua
16	qqqq	65536	ad 1	XVI. octaua
17	Eß	131072	ad 1	XVII. octaua
18	qcc	262144	ad 1	XVIII. octaua
19		524288	ad 1	XIX. octaua
20		1048576	ad 1	XX. octaua

Wie die Tabelle verstanden werden muss

Diese Tabelle birgt bedeutende Geheimnisse: Erstens: Die Exponenten erklären die cossischen Zeichen in der zweiten Spalte und in der dritten die Werte der geometrischen Reihe in doppelter Progression, welche mit der 1 beginnt. Die Exponenten zeigen als Reihe der natürlichen Zahlen vor allem, wie viele Proportionen der geometrischen Progression zwischen einer beliebigen Zahl dieser Progression und der 1 Platz finden. So zeigt sich zum Beispiel bei der Zahl 1, dass zwischen 2, dem R der geometrischen Progression, und der 1 nur eine Progression enthalten ist, die von 2 zu 1.

Aber bei der 2 der ersten Spalte zeigt sich bis zur 4 der zweiten Spalte oder dem q, dass zwischen 4 und der 1 zwei Proportionen enthalten sind, nämlich die von 4 zu 2 und die von 2 zu 1. Auf gleiche Weise wird bei der 8 angezeigt, dass zwischen qqq oder der Zahl 256 [und 1] acht Proportionen enthalten sind, und so geht es endlos weiter.

Zweitens: Werden zwei beliebige Zahlen der Exponentenreihe miteinander multipliziert, ergibt dies den Exponenten desjenigen cossischen Zeichens, das aus den cossischen Zeichen der gewählten Exponenten zusammengesetzt ist. Nimmt man etwa 2×3 , so ergibt sich 6, also der Exponent mit dem Buchstaben qc, der sich aus q und c zusammensetzt. Gleiches gilt für die Division.

Drittens: Bei dieser Progression der Proportio dupla zeigt der Hauptwert [2] [terminus maior], dem in der zweiten Spalte 4 entspricht, dass die Basis 2 [terminus radicalis] zweimal genommen werden muss, damit man die 4 als dritte Zahl der Progressio dupla erhält. Denn wenn man 2 zweimal hintereinanderschreibt: 2, 2, und dann miteinander multipliziert, erhält man 4. Die 3, der in der zweiten Spalte 8 entspricht, zeigt an, dass man, um die Kubikzahl oder die 8 zu erhalten, die 2 dreimal schreiben, also 2, 2, 2, und dann miteinander multiplizieren muss. Auf diese Weise macht man aus der Basis [radix] 2, wenn man sie achtmal schreibt und das miteinander multipliziert (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2), das Produkt 256, das genau dem Exponenten [numerus exponentis] 8 entspricht. Um schließlich die letzte Zahl [der obigen Tabelle] 1.048.576 hervorzubringen, deren Exponent 20 ist, muss man die Basis 2 zwanzigmal schreiben: <165> »2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2«, und diese wie gewöhnlich multiplizieren. Gleiches gilt auch für jeden anderen Exponenten, der anzeigt, wie oft man die Basis 2 hinschreiben muss, damit man die entsprechende Proportionszahl erhält. Auf diese Weise können wir ganz leicht alle cossischen Zahlen bestimmen. Wünscht man zum Beispiel herauszufinden, was eine quadrato-quadratische Zahl ist, können wir sagen, sie sei die Zahl, die entsteht, wenn man irgendeine Zahl viermal aufschreibt und multipliziert, wie es hier mit der 2 geschieht. So entsteht auch die quadrato-kubische Zahl, wenn man 2 sechsmal hinschreibt und multipliziert. All dies ist viel zu leicht, als dass es ausführlicher erklärt werden müsste.

Um aber das, was wir gleichsam vorausgesetzt haben, auf die Musik anzuwenden, müssen wir zuerst darlegen, wie sich der Verlauf einer Oktave mit Hilfe des eben Gesagten gestaltet.

Kanon I

Oktaven bis ins Unendliche multiplizieren

Das Verfahren, Oktaven bis ins Unendliche fortzuführen

Da eine Oktave in der Proportio dupla besteht, multipliziert man sie nach derjenigen Regel bis ins Unendliche, die wir in unserer ersten Voraussetzung [suppositio] gelehrt haben: indem man nämlich den Zahlenwert der Proportion [denominator proportionis] zuerst mit sich selbst multipliziert und dann das Produkt immer der Reihe nach mit derselben Zahl. Wenn man also die gegebene Proportion der Oktaven 1, 2, 4, 8 fortführen will, multipliziere man die letzte Zahl mit 2 und erhält 16, dann wieder mal 2, was 32 ergibt und so unendlich weiter. Auf gleiche Weise führt man eine Proportio tripla oder quadrupla fort, unter deren Namen in der Musik die Konsonanzen Oktave plus Quinte und Doppeloktave geführt werden.

Man sehe sich eine solche, bis zu 20 fortgeführte Progression oder Multiplikation in der zweiten Spalte der obigen Tabelle an. Will man sie aber darüber hinaus fortsetzen, multipliziere man die letzte Zahl mit 2 und man erhält die einundzwanzigste Oktave, diese wieder mit 2 multipliziert ergibt die zweiundzwanzigste Oktave und so fort bis ins Unendliche. Falls das aber zu langwierig wird, kann man eine beliebige Zahl der Oktavprogression ohne kontinuierliche Weiterführung herausfinden, indem man die oben

genannte Pragmatia II anwendet. Angenommen, man hat als letzte Zahl der Proportio dupla 32, deren Exponent 5 ist, und möchte wissen, welche Zahl oder Proportion der zehnte Wert oder die zehnte Oktave hat. Dann muss man gemäß Pragmatia II die 32 mit sich selbst multiplizieren und erhält als Produkt 1.024, was an die zehnte Stelle gesetzt werden muss. Eine zehnfache Oktave in der Musik hat diese Proportion. Denn die Verdopplung des Exponenten 5 ergibt 10, was der gesuchten und gefundenen Proportion entspricht. Dasselbe Produkt ergibt auch die Multiplikation von 16 mit 64, weil deren Exponenten 4 und 6 summiert 10 ergeben, welcher Zahl zehn Oktaven zugeordnet werden. Will nun einer wissen, welche Proportionszahl die vierzigste Oktave hat, kann er das Ergebnis leicht erhalten, wenn er die letzte Zahl der Tabelle, 1.048.576, die den Exponenten 20 hat, mit sich selbst multipliziert. Die sich ergebende Zahl ist nämlich laut Pragmatia II die gesuchte Zahl. 20×2 ergibt 40, den gesuchten Ort und gesuchten Wert. Wenn man aber den dreißigsten Wert der Proportio dupla zu erfahren wünscht oder wenn einer wissen will, welche Proportion dreißig Oktaven haben, der nehme in der ersten Spalte zwei Exponenten, die zusammengezählt die Zahl 30 bilden, also etwa 10 und 20, und multipliziere die Proportionen, die diesen Zahlen in der zweiten Spalte entsprechen, nämlich 1.024 und 1.048.576. Er erhält 1.073.741.824 und hat damit die Proportion von dreißig Oktaven. Wenn man darüber hinaus noch wissen möchte, welche Proportion fünfzig Oktaven haben, dann nehme man Exponenten, die zusammengezählt 50 ergeben, multipliziere die ihnen entsprechenden Proportionen und erhält so das Gesuchte. Dasselbe erreicht man mit der eben erwähnten cossischen Rechenmethode. Will man beispielsweise wissen, welche Zahl zwanzig Oktaven entspricht, dann potenziere man den größeren Wert der Proportio dupla so oft, wie die 20 Einheit hat, also zwanzigmal. Nach einer solchen ordnungsgemäßen Multiplikation erhält man $1.048.576 : 1$, die gesuchte Zahl [Proportion]. Weil es aber mühsam ist, die 2 so oft mit sich selbst zu multiplizieren, schreibe man <166> anstelle von zwanzig Zweiern besser zehn Vierer, die miteinander multipliziert dieselbe Zahl ergeben. Oder man nehme, wenn einem auch das noch zu viel ist, irgendeine Zahl aus der geometrischen Reihe, deren Exponent beliebig oft in der Zwanzig enthalten ist, wie zum Beispiel 32, die den Exponenten 5 hat, der viermal in 20 enthalten ist. Man schreibe das viermal (32, 32, 32, 32), multipliziere die Zahlen miteinander und erhält genau dieselbe Zahl wie vorher für die zwanzig Oktaven.

Der Nutzen besagter Progressionen

Aus dem bisher Gesagten, das vielleicht etwas ausführlicher als nötig war, geht leicht hervor, wie schön man Konsonanzen von beliebiger Proportion durch Multiplikation fortführen und bis ins Unendliche multiplizieren kann. Aber vielleicht sagt jetzt ein Naseweis, das sei doch alles müßig und habe für die Musik keine Bedeutung, da kein Instrument in der Lage sei, einen Klang über sieben Oktaven hinaus hervorzubringen. Dem antworte ich, dass wir dies nicht so sehr in Hinblick auf die praktische Musik geschrieben haben, als vielmehr um der vielen Geheimnisse der verborgenen musikalischen Philosophie willen, die wir in den entsprechenden Büchern und Stellen dieses Werkes offenlegen wollen. Wer erstaunt nicht darüber, dass man die Entstehung der Körper und ihre Vervielfältigung bis ins Unendliche nicht besser hat darstellen können als durch die

Multiplikation der ersten aller Konsonanzen, der Oktave? Man sieht, dass es in der Tabelle oben sich mit der ersten Zahl oder der Eins so verhält wie mit dem Punkt oder dem Einklang [unisonus]. Die Wurzelzahl [Radix], oder die Zwei [binarius numerus], eröffnet die Linie, die aus dem Fließen [fluxus] des Punktes entsteht, so wie sich aus dem ansteigenden Fließen des Einklangs die Oktave entwickelt. Man sieht schließlich, wie sich aus der Bewegung [motus] der Zweierheit die Viererzahl, oder die Fläche, entwickelt und aus deren Bewegung die Achtzahl, das heißt der Würfel. So geht es auch mit den anderen Körpern.

Wie die musikalischen Proportionen den geometrischen entsprechen

Die Oktave mit der Proportion 2 : 1 entspricht zunächst der Linie [linea], die Oktave 4 : 1 der Fläche [superficies] und die Dreifachoktave 8 : 1 dem Körper [corpus]. Die vierfache Oktave 16 : 1 entspricht dem quadrato-quadratischen Körper, die fünffache 32 : 1 dem Corpus surdosolidum, die sechsfache 64 : 1 dem quadratisch-kubischen Körper, die siebenfache 128 : 1 dem zweiten Corpus surdosolidum, die achtfache 256 : 1 dem ersten quadrato-quadrato-quadratischen Körper und so weiter bis ins Unendliche, wie es die Tabelle oben zeigt. Diese alle bergen in der Natur große Geheimnisse.

In den Proportionen sind viele Geheimnisse verborgen.

Ich sage: Wer zum Wesen dieser harmonischen Körper vordringt und gemäß ihrer Entstehung und Vervielfältigung vorgeht, für den wird es kein Geheimnis in der Natur der Dinge geben, zu dessen Kenntnis er nicht gelangen könnte. Diese Dinge sollen mit Gottes Hilfe ausführlicher und als eigenes Thema in unserem Werk *Mundus subterraneus* im Buch über die Mischung der Gesteine und in unserem Werk über die hieroglyphische Alchemie [*Œdipus Ægyptiacus*] gemäß der Ansichten der alten Ägypter behandelt werden. Einstweilen soll es hier genügen, bei dieser Gelegenheit das Wesen der musikalischen Zahlen herauszufinden. Es soll daher der Unwissende die Sachen in Ruhe lassen, die er nicht versteht. Dies ist nicht für kleine Geister [humilibus ingeniis] geschrieben, sondern für helle, für solche, die es gewohnt sind, verborgene Dinge aufzuspüren. Es ist nämlich nicht die Sache eines Philosophen, immer am Wahrnehmbaren zu hängen, sondern seine Aufgabe ist, davon zu abstrahieren und die Dinge nach Maßgabe der Vernunft auf ihren höchsten Stufen zu untersuchen, bis er die offene Pforte zur Wahrheit der verborgenen Dinge erblickt. Dazu ist nichts besser geeignet als die Kenntnis der verborgenen Philosophie der Harmonie, die wir im neunten und zehnten Buch erörtern werden.

Kanon II

Multiplikation der anderen Konsonanzen wie auch der Dissonanzen, die in der Proportio particularis [ganzzahlig] bestehen, bis ins Unendliche

Wie man die anderen Konsonanzen bis ins Unendliche fortführt

Möchte man zuerst die Quinte vervielfältigen, so nehme man zunächst ihre Grundform [forma radicalis] in den kleinsten Werten, 3 : 2. Weil ja die Oktave mit Quinte [diapason diapente] im Verhältnis 3 : 1 steht, verdoppelt man den größeren Wert der Proportion so,

wie man es bei der Oktave getan hat, lässt den kleineren Wert 1 stehen und erhält die gesuchte Zahl. Auf diese Weise erhält man die Gestalt der dritten Quinte, 6 : 1. Die der vierten Quinte ist dann 12 : 1, <167> die der fünften 24 : 1, die der sechsten 48 : 1, die der siebten 96 : 1, die der achten 192 : 1 und so weiter bis ins Unendliche. Die Fortsetzung der Quarte macht man so: Da ihre Grundform 4 : 3 ist, verdoppelt man den größeren Wert bis ins Unendliche, lässt den kleineren Wert stehen und erhält so das Gesuchte. So gewinnt man als zweite Quarte 8 : 3, als dritte 16 : 3, als vierte 32 : 3, als fünfte 64 : 3 und so weiter. Die Proportion der kleinen Terz ist 6 : 5, man führt sie also folgendermaßen fort: Man verdopple den größeren Wert bis ins Unendliche, behalte den kleineren immer bei und erhält das Gesuchte. So gewinnt man mit 12 : 5 die zweite Terz, die dritte kleine Terz 24 : 5, die vierte 48 : 5 und so weiter. Will man die große Terz mit der Proportion 5 : 4 fortführen, muss man eine andere Methode benutzen: Man dividiert zuerst den kleineren Wert 4 so lange durch 2, bis 1 übrig bleibt, und belässt den größeren. Danach verdoppelt man den größeren Wert bis ins Unendliche, behält aber den kleineren Wert 1 bei. So erhält man als zweite große Terz 5 : 2, als dritte 5 : 1, als vierte 10 : 1, als fünfte 20 : 1 und so weiter. So wird auch die kleine Sexte mit der Proportion 8:5 fortgeführt, indem man den größeren [Kircher schreibt fälschlich »minorem«] Wert bis ins Unendliche verdoppelt und den kleineren beibehält. Auf diese Weise erhält man als zweite kleine Sexte 16 : 5, als dritte 32 : 5 und so weiter. Der Wert für die große Sexte 8 : 3 wird auf eben diese Art und Weise fortgeführt. Damit hat man die Fortführung aller Konsonanzen in einer Oktave. Jetzt steht noch aus, die Fortführung der Dissonanzen zu zeigen. Innerhalb einer Oktave gibt es sieben Dissonanzen [bei Kircher fälschlich: consonantiae]: den Halbton, den Ganzton oder die kleine oder große Sekunde, den Tritonus, die verminderte Quinte, die kleine und die große Septime [bei Kircher: minima].

Fortsetzung der Werte des Halbtons und der anderen Dissonanzen

Möchte man den Wert des Halbtons mit der Proportion 16 : 15 fortsetzen, so verdopple man den größeren Wert bis ins Unendliche und lasse den kleineren Wert stehen. Der Ganzton wird erweitert, indem man den kleineren Wert 8 schrittweise bis zur 1 halbiert, die man ab dann stets beibehält und den größeren Wert 9 bis ins Unendliche verdoppelt. Auf diese Weise erhält man das Gesuchte. Der Wert des Tritonus 32 : 45 wird so erweitert: Man halbiert den kleineren Wert 32 bis zur 1 und behält den größeren unverändert bei. Ist man mit dem Halbieren bei der 1 angekommen, verdopple man den größeren Wert bis ins Unendliche und behalte die 1 bei. Die Proportion 45 : 64 der verminderten Quinte erweitert man bis ins Unendliche, indem man den ersten Wert 45 beibehält und den zweiten Wert 64 bis ins Unendliche verdoppelt. Die kleine Septime mit der Proportion 5 : 9 setzt man fort, indem man den ersten Wert beibehält und den zweiten bis ins Unendliche verdoppelt, um das Gesuchte zu erhalten. Alles bisher Gesagte wird in den folgenden Tabellen deutlicher.

Kanon III

Wie man die Stufen [gradus] oder die Intervalle von aufgeschichteten Oktaven findet

Da jede Oktave aus sieben Intervallstufen besteht, kann man folgendermaßen leicht zur Anzahl der Intervalle einer aufgeschichteten Oktave kommen: Man multipliziert den Exponenten der aufgeschichteten Oktave mit acht, zieht vom Produkt den unmittelbar vorhergehenden Exponenten ab und erhält so das Gesuchte. Ich will zum Beispiel wissen, wie viele Intervalle sieben Oktaven enthalten. Man multipliziert 7×8 , erhält 56 und zieht von diesem Produkt 6 ab, den vorausgehenden Exponenten. Es bleiben 50, und so viele Intervalle haben sieben aufgeschichtete Oktaven, die auf der musikalischen Skala einer Quinquagesime entsprechen. Ferner möchte ich wissen, wie viele Intervalle in zwanzig aufeinandergeschichteten Oktaven enthalten sind oder, was dasselbe ist, in zwanzig Oktaven überhaupt. Ich multipliziere den Exponenten 20×8 – das ergibt 160 –, ziehe von dem Produkt den unmittelbar vorausgehenden Exponenten 19 ab und erhalte das Ergebnis 141. So viele Intervalle haben zwanzig Oktaven, die auf der Tonleiter einer Centesima-quadragesima-prima entsprechen. Dann will ich wiederum wissen, wie viele Intervalle hundert Oktaven haben. Ich multipliziere 100×8 und erhalte 800, ziehe von diesem Produkt <168> 99 ab, und es bleiben 701. So viele Intervalle haben hundert aufgeschichtete Oktaven, die auf der Tonleiter einer Centesima-septima-una entsprechen. Zwei Oktaven, also die Quindezime, haben demnach 15 Intervalle. Die dritte Oktave oder eine Vigesima-secunda hat 22 Intervalle, so dass die aufgeschichtete Oktave immer nach der Zahl der Intervalle benannt wird, die sie enthält.

Benennung der Intervalle innerhalb einer Oktave

Weiß man einmal die Zahl der Intervalle in beliebig vielen aufgeschichteten Oktaven, so ist nichts leichter, als die übrigen Konsonanzen zu nennen, die innerhalb einer Oktave enthalten sind. Wenn man zum Beispiel wissen möchte, um wie viele Stufen oder Intervalle die Quinte in der sechsten Oktave von der 1 oder dem Proslambanomenos entfernt ist, addiere man 5 zu den in den sechs Oktaven enthaltenen Intervallen (nämlich 43, da ja die Quinte aus fünf Intervallschritten besteht) und erhält 48 Intervalle. Um so viele Intervalle ist also die Quinte vom ersten Intervall oder von der 1 entfernt. Wenn man aber zu 43 noch 3 dazuzählt, erhält man 46, dem entspricht die Terz in der sechsten Oktave. Zählt man 4 zu 43 hinzu, ergibt das 47, dem entspricht die Quarte in der sechsten Oktave. Wenn man 6 zu 43 hinzuzählt, erhält man 49, dem entspricht die Sexte in der sechsten Oktave. Auf diese Weise findet man nicht nur die Intervalle einer jeden Konsonanz in jeder beliebigen aufgeschichteten Oktave, sondern wie gesagt auch die Namen einer jeden der besagten Konsonanzen. Wir haben die Zahl der Intervalle, die in den aufgeschichteten Oktaven enthalten sind, in die dritte Spalte der folgenden Tabelle eingetragen. Mit Hilfe dieser Intervalle findet man leicht die Bezeichnungen der anderen Konsonanzen wie auch die Zahl der Intervalle, die in einer beliebigen aufgeschichteten Oktave aus bestimmten Intervallen besteht, mit ihren jeweiligen Namen. Damit der wissbegierige Leser versteht, was wir unter diesen Intervallen und Stufen verstehen, drücken wir sie hier in Noten aus:



In der ersten Darstellung sieht man, wie die Oktaven mit ihren Intervallen und Stufen fortgeführt werden, in der zweiten, wie Quarten und Quinten fortgeführt werden: genauso, wie man Linien bis ins Unendliche fortführen kann. Die schwarzen Noten bezeichnen das Ende eines Quint- und den Beginn eines Quartraums. Die Zahlen unten zeigen die Oktavzahl der Quinten und Quarten an.

<169>

Tabula continuationis consonantiarum.										
I Num. Oct.	II Continuatio octa- uarū siue diapasō.	III Num. Interv. octavarū repl.	IV Continuatio diapente.	V Continuatio diatessaron.	VI Continuatio Semiditoni.	VII Continuatio ditoni.	VIII Continuatio sextæ minoris.	IX Continuatio sextæ maioris.		
1	Unifohus ad 1									
1	Oktava 2 ad 1	7	3 ad 2	4 ad 3	6 ad 5	5 ad 4	8 ad 5	5 ad 3	I	
2	4 ad 1	15	3 ad 1	8 ad 3	12 ad 5	5 ad 2	16 ad 5	10 ad 3	II	
3	8 ad 1	22	6 ad 1	16 ad 3	24 ad 5	5 ad 1	32 ad 5	20 ad 3	III	
4	16 ad 1	29	12 ad 1	32 ad 3	48 ad 5	10 ad 1	64 ad 5	40 ad 3	IV	
5	32 ad 1	36	24 ad 1	64 ad 3	96 ad 5	20 ad 1	128 ad 5	80 ad 3	V	
6	64 ad 1	43	48 ad 1	128 ad 3	192 ad 5	40 ad 1	256 ad 5	160 ad 3	VI	
7	128 ad 1	50	96 ad 1	256 ad 3	384 ad 5	80 ad 1	512 ad 5	320 ad 3	VII	
8	256 ad 1	57	192 ad 1	512 ad 3	768 ad 5	160 ad 1	1024 ad 5	640 ad 3	VIII	
9	512 ad 1	64	384 ad 1	1024 ad 3	1536 ad 5	320 ad 1	2048 ad 5	1280 ad 3	IX	
10	1024 ad 1	71	768 ad 1	2048 ad 3	3072 ad 5	640 ad 1	4096 ad 5	2560 ad 3	X	
11	2048 ad 1	78	1536 ad 1	4096 ad 3	6144 ad 5	1280 ad 1	8192 ad 5	4120 ad 3	XI	
12	4096 ad 1	85	3172 ad 1	8192 ad 3	12288 ad 5	2560 ad 1	16384 ad 5	8240 ad 3	XII	
13	8192 ad 1	92	6344 ad 1	16384 ad 3	24576 ad 5	5120 ad 1	32768 ad 5	16280 ad 3	XIII	
14	16384 ad 1	99	12688 ad 1	32768 ad 3	49152 ad 5	10240 ad 1	65536 ad 5	32560 ad 3	XIV	
15	32768 ad 1	106	25372 ad 1	65576 ad 3	98304 ad 5	20480 ad 1	131072 ad 5	65120 ad 3	XV	
16	65536 ad 1	113	50752 ad 1	131152 ad 3	196608 ad 5	40960 ad 1	262144 ad 5	130240 ad 3	XVI	
17	131072 ad 1	120	101504 ad 1	262304 ad 3	393216 ad 5	81920 ad 1	524288 ad 5	260480 ad 3	XVII	
18	262144 ad 1	127	203008 ad 1	524608 ad 3	786432 ad 5	163840 ad 1	1048576 ad 5	520960 ad 3	XVIII	
19	524288 ad 1	134	406016 ad 1	1049216 ad 3	1572864 ad 5	327680 ad 1	2097312 ad 5	1041920 ad 3	XIX	
20	1043576 ad 1	141	812032 ad 1	2098432 ad 3	3145728 ad 5	655360 ad 1	415504 ad 5	2083840 ad 3	XX	
30	1073741824 ad 1									
40	109951627776 ad 1									
50	1126108696742624 ad 1									
100										

Hinweis

Der Leser wird bemerken, dass diese Tabelle die fortgeschriebenen Proportionen der einzelnen Konsonanzen auflistet, die in einer Oktave enthalten sind. Außerdem geben die großen Werte der Proportionen die Schwingungen [vibrationes] von den kleinen im Verhältnis zu den großen Saitenabschnitten an, in der Weise, dass die unveränderten kleinen Werte immer die großen Saitenabschnitte darstellen, wie dies im Folgenden noch deutlicher erklärt wird.

Tabelle der Dissonanzen

I	II	III	IV	V	VI	VII	
	Halbton	Ganzton	Tritonus	Verminderte Quinte	Kleine Septime	Große Septime	
1	15 : 16	8 : 9	32 : 45	45 : 64	5 : 9	8 : 15 ¹	I
2	15 : 32	4 : 9	16 : 45	45 : 128	5 : 18	4 : 15	II
3	15 : 64	2 : 9	8 : 45	45 : 256	5 : 36	2 : 15	III
4	15 : 128	1 : 9	4 : 45	45 : 512	5 : 72	1 : 15	IV
5	15 : 256	1 : 18	2 : 45	45 : 1.024	5 : 144	1 : 30	V
6	15 : 512	1 : 36	1 : 45	45 : 2.048	5 : 288	1 : 60	VI
7	15 : 1.024	1 : 72	1 : 90	45 : 4.096	5 : 576	1 : 120	VII

Erklärung der Tabelle

Die Tabelle [auf S. 169] hat neun Spalten.

- Die erste enthält die Reihe der natürlichen Zahlen und gibt jeweils die Nummer der Oktaven und der anderen Konsonanzen an.
- Die zweite enthält die Proportionen der aufgeschichteten Oktaven,
- die dritte die Zahl der in den jeweiligen Oktaven enthaltenen Intervalle,
- die vierte die Proportionen der Quinten,
- die fünfte die der Quarten,
- die sechste die der kleinen Terzen,
- die siebte die der großen Terzen,
- die achte die der kleinen Sexten,
- die neunte die der großen Sexten.

Jemand möchte zum Beispiel wissen, welche Proportion oder welche musikalische Zahl neun Oktaven entspricht. Er suche zuerst in der ersten Spalte die Zahl 9. Ihr ist in der zweiten Spalte unmittelbar die Proportion von neun aufgeschichteten Oktaven zugeordnet, nämlich 512 : 1. Bei zwanzig Oktaven steht die Zahl 1.043.576 : 1, die Proportion für zwanzig aufgeschichtete Oktaven. In der dritten Spalte findet man für jede Oktave die Intervalle, aus der sie besteht, worüber soeben ausführlich gesprochen wurde. Möchte man also wissen, welcher Zahl sechs aufgeschichteten Quinten in verschiedenen Oktaven entsprechen, so suche man in der ersten Spalte die 6. Rechts davon in der vierten Spalte findet man 48 : 1, die gesuchte Proportion von sechs Quinten. Doch diese Tabelle ist viel zu leicht zu benutzen, als dass sie hier noch ausführlicher erklärt werden müsste.

¹ Bei Kircher steht: 8 : 15, 4 : 15, 9 : 60, 9 : 120, 5 : 240, 5 : 480, 9 : 960.

Der Nutzen der Tabelle

In der Naturphilosophie hat diese Tabelle einen hervorragenden Nutzen, um Geschwindigkeit und Langsamkeit der Bewegung zu erforschen. Obwohl wir darüber eigens im sechsten Buch sprechen werden, wollen wir hier doch einiges vorausschicken, damit sich der Leser, damit vertraut, bereitwilliger dem besagten Buch nähern kann.

Wie man Schwingungen einer Saite auffassen muss

Die Proportionen der in obiger Tabelle dargestellten harmonischen Intervalle können zweierlei angeben: die Länge des längeren Saitenteils sowie die Zahl der Schwingungen oder das Auf- und Abspringen des kürzeren Saitenteils – oder sie können, was dasselbe ist, die Proportionen zweier Saiten anzeigen, von denen eine lang, die andere kurz ist. Die Zahl der Schwingungen oder die Tiefe des Klangs der längeren Saite wird durch den kleineren Ausdruck oder die kleinere Zahl der Proportion angezeigt. Der hohe Klang oder <171> die Zahl der Schwingungen der kürzeren Saite wird durch den größeren Wert oder die größere Zahl der Proportion angezeigt. Wenn also zum Beispiel zwei Saiten gegeben sind, deren Längen sich zueinander in der Proportio dupla 2 : 1 verhalten, dann bedeutet die größere Zahl der Proportion, dass die Saite zwei Handbreit lang ist. Die kleinere Zahl 1 zeigt die Schwingung oder die Tiefe des Tons. Und umgekehrt: Die kleine Saite von einer Handbreit Länge zeigt an, dass zwei Schwingungen geschehen, während die zwei Handbreit lange eine durchläuft. Folglich klingt sie doppelt so hoch wie die zwei Handbreit lange. Die Zahl der Auf- und Abschwünge [numerus curso-recursuum] steht nämlich im umgekehrten Verhältnis zur Länge der Saiten, was wir im sechsten Buch noch ausführlicher darlegen wollen. Wenn daher jemand wissen wollte, von welcher Länge eine Saite sein muss, die im Verhältnis zum zweiten kleineren Teil, der eine Handbreit lang ist, in zehn Oktaven klingen soll, so antworte ich: Es muss eine solche sein, die in der Tabelle der Proportion von der Zahl 10 an entspricht, also 1.024 : 1. Also muss die Saite, die mit dem kleineren Teil in zehn Oktaven klingen soll, eine Länge von 1.024 Handbreit haben. Wiederum würde eine Saite von einer Handbreit 1.024 Schwingungen ausführen, während eine Saite von 1.024 Handbreit nur eine vollzieht. Und konsequent würde die Ein-Handbreit-Saite 1.024mal höher klingen als die von 1.024 Handbreit, vorausgesetzt, beide wären mit Saiten von der gleichen Dicke und mit gleichem Gewicht gespannt.

Corollarium I

Es können keine Töne gefunden werden, die bis zu 14 Oktaven auf- oder absteigen.

Aus dem Gesagten wird deutlich, dass man keine Töne finden kann, die so tief oder so hoch sind, dass sie vierzehn Oktaven auf- oder absteigen. Nach der in der Tabelle angegebenen Zahl 16.384 : 1 muss die längere Saite ein Leuge [leuca, Längeneinheit von 2 bis 7 Kilometer] lang sein, um vierzehn Oktaven oder eine Nonagesima-nona zu erreichen. Und obgleich man die allzu große Länge einer solchen Saite durch größere Dicke kompensieren könnte, müsste die Saite von solcher Dicke sein, dass sie zum Klingen völlig untauglich wäre. Zum Beispiel: Wenn jemand eine Saite von 16.384 Handbreit Länge so reduzieren und so verdicken wollte, dass sie, wenn Länge durch Dicke ausgeglichen wäre, an Länge der Ein-

Handbreit-Saite gleich wäre, dann müsste, was wir im sechsten Buch beweisen werden, diese Saite mit Sicherheit um 268.435.456mal dicker sein als die Handbreit-Saite. Denn das Verhältnis von 268.435.456 : 1 ist die Verdopplung [Quadrierung] des Verhältnisses von 16.384 : 1, was die Längen zweier gleich dicker Saiten darstellt und womit vierzehn Oktaven erreicht werden. Eine solche Saite ist völlig ungeeignet für einen Ton oder eine Schwingung, da sie durch ihr Eigengewicht zerreißen oder zerbrechen würde.

Corollarium II

Eine Saite, die tausend Oktaven erklingen lassen könnte,
müsste das ganze Firmament umspannen.

Daraus wir klar, dass eine Saite, die tausend Oktaven erklingen lassen würde, so lang sein müsste, dass sie herumgewickelt den ganzen Kreis des Firmaments umspannen müsste. Zu diesen wunderlichen und paradoxen Dingen siehe das schon zitierte sechste Buch. Damit haben wir diese Dinge korrekt dargestellt. Da aber nicht alle Konsonanzen für die Praxis wichtig sind, sondern nur die, die innerhalb von vier oder höchstens fünf Oktaven enthalten sind, wollen wir hier nur die für die Musiker gewohnten im Monochord aufzeigen.

Kapitel IV

Die einfache geometrische Teilung

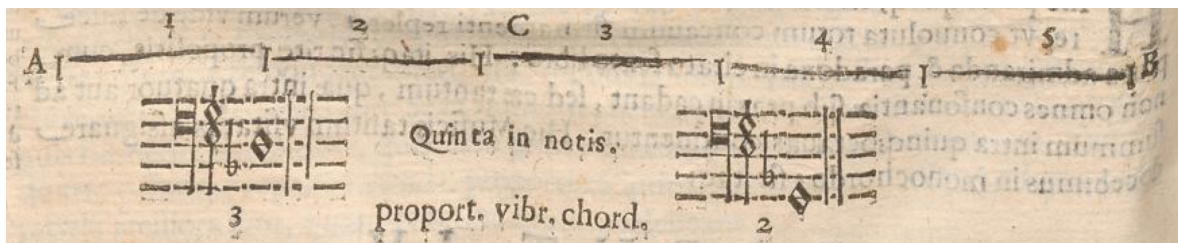
Proposition I

*Eine gespannte Saite soll so geteilt werden,
dass ein Teil zum anderen in der Oktave klingt*

Gegeben sei das Monochord AB mit der Saite CD. Man sucht die Konsonanz der Oktave, <172> deren Verhältnis 2 : 1 ist, da sie in der Proportio dupla besteht. Man teile nun die Saite in drei gleiche Teile, denn die kleinste Proportion 2 : 1 wird aus drei Einheiten gebildet. Wenn man danach einen Saitenteiler unter Punkt G befestigt und CG und GD zusammen erklingen lässt, sage ich, das CG zu GD in der gesuchten Oktave erklingen wird. Wie im dritten Buch unter Postulat VI gezeigt wurde, verhält sich Klang CG zum Klang GD wie der Saitenteil CG zum Saitenteil GD. CG zu GD verhält sich aber wie 1 : 2. Insofern muss auch der Klang CG zum Klang GD im gleichen Verhältnis stehen, und diese Töne bilden die Oktave. Wir haben somit die Saite so geteilt, dass ein Teil zum anderen in der Oktave erklingt. Wie das gemacht werden muss, zeigt die Abbildung:

Eine Quinte auf der Saite bestimmen

Wie man die Quinte findet:



Wie man die auf der Saite die Quarte bestimmt

Gegeben ist die Saite AB, auf ihr soll man die Quarte angeben. Da die Quarte in der Proportio sesquitertia steht, also $4 : 3$, teilt man die Saite zunächst in sieben Teile und setzt den Saitenteiler C nach dem dritten Teil, so dass auf der einen Seite drei, auf der anderen vier Teile liegen. Ich sage, dass diese Teile AC und CB, wenn sie zum Klingen angeregt werden, in der Quarte klingen. Denn das Verhältnis des Abschnitts AC zu dem von CB ist dasselbe wie das vom einen zum anderen Ton. <173> Der Abschnitt auf der Saite von A nach C steht zu dem von C nach B im Verhältnis der Proportio subsesquitertia $[3 : 4]$. Also

ist auch der Klang oder die Konsonanz, die darauf erzeugt wird, die der Quarte, die wir ja auf der Saite anzeigen wollten, was so geschehen ist.

Wie man die Quarte findet:

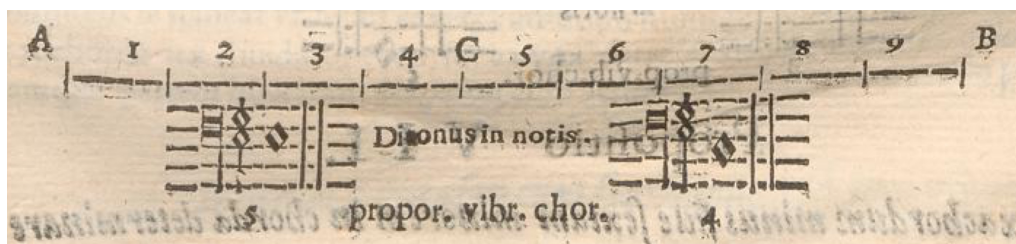


Proposition IV

Wie man die große Terz auf der Saite bestimmt

Die [reine] große Terz [ditonus] besteht in der Proportio sesquiquarta, also im Verhältnis 5 : 4. Möchte man sie auf der Saite anzeigen, so teile man zunächst die Saite in neun gleiche Teile, also in so viele Teile, wie die addierten Proportionsteile von 5 : 4 ergeben. Wenn man nun den Saitenteiler ans Ende des vierten Teils setzt, so dass auf der einen Seite vier, auf der anderen fünf Teile bleiben, und beide Teile zum Klingen bringt, dann erklingen sie, wie ich sage, in der gesuchten Konsonanz der großen Terz. Wie sich nämlich die Abschnitte AC zu CB verhalten, so auch ihre Töne. Die Abschnitte AC und CB stehen aber in der Proportio sesquiquarta, folglich auch die Töne von AC und von CB, was die Konsonanz ist, die wir große Terz nennen. Wir haben somit die große Terz auf der Saite angezeigt, was zu tun war.

Wie man die große Terz findet:



Proposition V

Wie man auf der Saite die kleine Terz bestimmt

Suche nach der kleinen Terz

Da die kleine Terz [Semiditonus] in der Proportio sesquiquinta besteht und sich wie 6 : 5 verhält, muss man, wenn man sie mithilfe dieser Proportion auf der Saite bestimmen möchte, die Saite AC in elf gleiche Teile teilen. Bringt man den Saitenteiler so an, dass auf der einen Seite fünf, auf der anderen sechs Teile bleiben, so werden die zum Klingen gebrachten Abschnitte auf der Saite die kleine Terz ertönen lassen. Da sich nämlich Ton zu Ton verhält wie Saitenabschnitt zu Saitenabschnitt, und die beiden Abschnitte der geteilten Saite in der Proportio sesquiquinta stehen, ist der Fall klar.

<174>

Auffinden der kleinen Terz



Proposition VI

Wie man auf der Saite die große Sexte bestimmt

Die große Sexte

Wenn man die große Sexte [Hexachordum maius] auf der Saite bestimmen will, teilt man die Saite AB in acht gleiche Teile und setzt den Saitenteiler so unter C, dass links drei und rechts fünf Teile bleiben: Denn in dieser Proportion steht die große Sexte, nämlich in der Proportio superbipartiens tertias [5 : 3]. Wenn man danach die beiden Saitenteile zum Schwingen bringt, erklingen sie, wie ich sage, in der großen Sexte. Der Beweis ergibt sich aus dem Vorherigen.

Auffinden der großen Sexte



Proposition VII

Wie man die kleine Sexte auf der Saite bestimmt

Die kleine Sexte

Die kleine Sexte [Hexachordum minus] steht in der Proportio supertripartiens quintas und verhält sich wie 8 : 5. Will man sie auf der Saite anzeigen, so muss man daher die Saite AB in 13 gleiche Teile teilen und den Saitenteiler unter Punkt C setzen, so dass auf der einen Seite fünf, auf der anderen acht Teile bleiben. Dann bringe man beide Abschnitte zum Klingen. Die Abschnitte AC und CB werden dann, sage ich, in der kleinen Sexte klingen. Die Begründung ergibt sich aus der Teilung.

Auffinden der kleinen Sexte



<175>

Proposition VIII

Wie man die Oktave mit großer Terz auf der Saite bestimmt

Man teilt die Saite AB in sieben gleiche Teile, so dass auf der einen Seite des unter C gesetzten Saitenteilers zwei, auf der anderen fünf Teile bleiben. Die Abschnitte, sage ich, erklingen dann zueinander in der Oktave mit Terz, weil beide Abschnitte im Verhältnis der Proportio dupla superpartiens von 1 : 2 abgeteilt worden sind. In dieser Proportion steht die Oktave mit Terz [große Dezime].

Auffinden der Oktave mit Terz



Proposition IX

Wie man die Oktave mit kleiner Terz auf der Saite bestimmt

Da die Oktave mit kleiner Terz [kleine Dezime] in der Proportio dupla superbipartiens quintas steht und sich wie 12 : 5 verhält, muss man gemäß der Addition der Zahlen der Proportion die Saite in 17 Teile teilen, so dass links vom Saitenteiler C fünf, rechts zwölf Teile bleiben. Werden nun beide Abschnitte zum Schwingen gebracht, so erklingen sie zueinander in der Oktave mit kleiner Terz, wie das Verhältnis es deutlich macht.

Auffinden der Oktave mit kleiner Terz

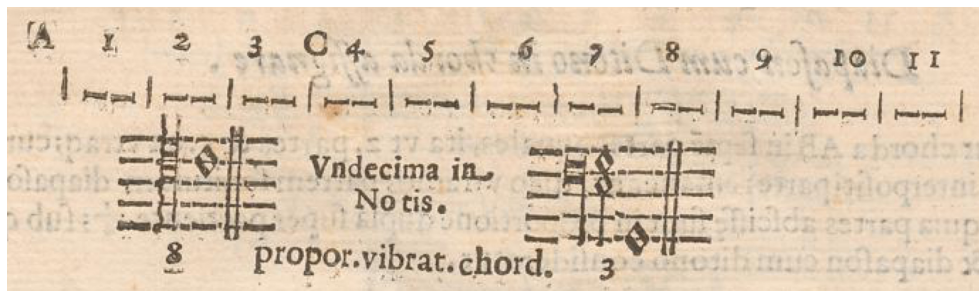


Proposition X

Wie man die Oktave mit Quarte auf der Saite bestimmt

Die Oktave mit Quarte [Undezime] besteht in der Proportio dupla supertripartiens tertias, sie verhält sich also wie 8 : 3. So teilt man gemäß der Addition der Zahlen die Saite AB in elf Teile, so dass der Saitenteiler am Punkt C drei Teile links und fünf Teile rechts von sich hat. Beide Abschnitte erklingen nun in der Oktave mit Quarte oder der Undezime, die man ja gesucht hat.

Auffinden der Oktave mit Quarte



Proposition XI

Wie man die Oktave mit Quinte oder die Duodezime auf der Saite bestimmt

Diese Konsonanz steht in der Proportio tripla, das Verhältnis ist also 1 : 3. Man teilt die Saite A[B] in vier Teile, so dass der Saitenteiler zwischen dem ersten und den drei weiteren Teilen steht. Die Abschnitte verhalten sich wie 1 : 3 und klingen in der Oktave mit Quinte oder der gesuchten Duodezime.

Auffinden der Oktave mit Quinte



Proposition XII

Wie man die Oktave mit großer Sexte oder die Tredezime auf der Saite bestimmt

Da diese Konsonanz in der Proportio tripla superpartiens von $\frac{1}{3}$ besteht und das Verhältnis 10 : 3 ist, teilt man die Saite in 13 gleiche Teile und setzt den Saitenteiler genau unter Punkt C zwischen die ersten drei Teile links und die zehn anderen rechts. Beide Abschnitte erklingen nun im Verhältnis 3 : 10, in der gesuchten Konsonanz von Oktave mit großer Sexte.

Auffinden der Oktave mit großer Sexte



<177>

Proposition XIII

Wie man die Doppeloktave oder Quindezime auf der Saite bestimmt

Da diese Konsonanz in der Proportio quadrupla besteht und sich daher wie 4 : 1 verhält, teilt man die Saite AB in fünf gleiche Teile und setzt den Saitenteiler zwischen den ersten und die anderen vier Teile unter C. Die Abschnitte im Verhältnis 1 : 4 erklingen nun in der gesuchten Konsonanz:



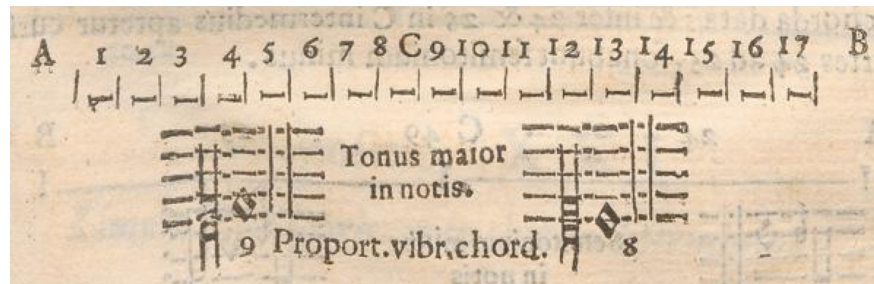
Somit haben wir nun das vollständige, aus zwei Oktaven bestehende System und das Verfahren, wie man dieses auf der Saite demonstrieren kann, gemäß der Reihenfolge und des Aufbaus der Konsonanzen vorgestellt. Jetzt bleibt nur noch anzugeben, wie man auch die kleineren Intervalle [minora intervalla] auf der Saite bezeichnen kann.

Proposition XIV

Wie man den großen Ganzton oder die vollkommene Sekunde [secunda perfecta] auf der Saite bestimmt

Da der große Ganzton in der Proportio sesquioctava steht, dem Verhältnis 9 : 8, deren Summe 17 ist, wird die Saite in siebzehn Teile geteilt und der Saitenteiler an C zwischen die ersten acht und die anderen neun Teile gesetzt. Die Abschnitte im Verhältnis 9 : 8, sage ich, erklingen im gesuchten großen Ganzton.

Auffinden des großen Ganztons



Proposition XV

Wie man den kleinen Ganzton auf der Saite bestimmt

Da der kleine Ganzton in der Proportio sesquinona besteht, sich also wie 10 : 9 verhält, ergibt sich aus der Addition der Zahlen 19, und in so viele Teile wird die Saite AB auch geteilt. Der Saitenteiler wird unter C zwischen zehn Teile auf der einen und neun auf der anderen Saite gesetzt. Ich sage, dass nun die beiden Abschnitte im gesuchten kleinen Ganzton erklingen. Die Begründung ist klar.

<178>

Auffinden des kleinen Ganztons



Proposition XVI

Wie man den großen Halbton auf der Saite bestimmt

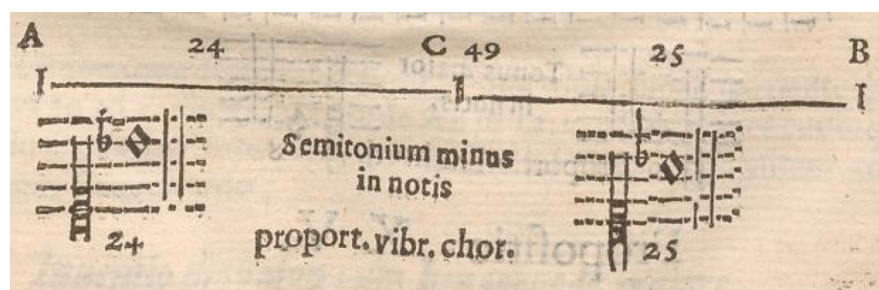
Da der große Halbton in der Proportio sesquidecima quinta besteht, deren Verhältnis 16 : 15 ist, wird die Saite AB in 31 Teile geteilt, so dass der Saitenteiler unter C zwischen 16 Teilen auf der einen und 15 Teilen auf der anderen Seite gesetzt wird. 16 : 15 erklingt nun im gesuchten großen Halbton.



Proposition XVII

Wie man den kleinen Halbton oder die diatonische Diësis auf der Saite bestimmt

Da der kleine Halbton in der Proportio sesquivigesima quarta besteht, sich also wie 25 : 24 verhält, muss die Saite AB gemäß der Addition in 49 Teile geteilt werden. Der Saitenteiler wird unter C zwischen 24 und 25 Teile gesetzt und die Anteile 24 : 25 erklingen im kleinen Halbton.



Proposition XVIII

Wie man das Diaschisma oder die Hälfte eines kleinen Halbtons auf der Saite bestimmt

Da ein Diaschisma in der Proportion super[bi]partiens 160 steht und sich folglich wie 162 : 160 verhält, muss man die Saite AB in 322 Teile teilen und den Saitenteiler so setzen, dass er an C genau zwischen 160 und 162 Teilen liegt. Die Abschnitte im Verhältnis 160 : 162 erklingen in einem Diaschisma oder der Hälfte eines kleinen Halbtons.

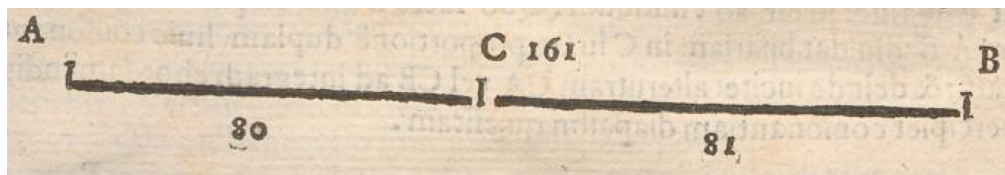
<179>



Proposition XIX

Wie man das Komma auf der Saite bestimmt

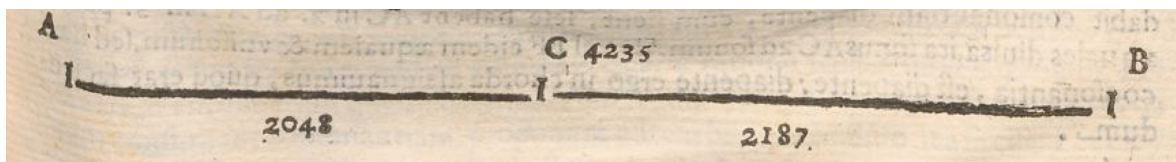
Das Komma besteht in der Proportio sesquiocagesima und verhält sich wie 80 : 81. Die addierten Zahlen ergeben 161. In so viele Teile wird die Saite AB geteilt und der Saitenteiler unter C zwischen 80 Teile links und 81 Teile rechts gesetzt, und damit hat man das gesuchte Intervall.



Proposition XX

Wie man die Apotome auf der Saite bestimmt

Die Apotome – das Intervall, um das der große den kleinen Halbton überragt – steht in der Proportion 2.048 : 2.187. Wenn man diese Zahlen addiert, ergibt sich 4.235, und in so viele Teile muss die Saite AB geteilt werden, so dass der Saitenteiler an C zwischen 2.048 und 2.187 Teilen steht. Die Abschnitte erklingen nun in der Apotome. Allerdings muss man sehr feine Ohren haben, um ein so kleines Intervall wahrnehmen zu können.



Proposition XXI

Wie man das pythagoreische Limma auf der Saite bestimmt

Man addiere 243 und 256, die Proportion des Limma, das ergibt 499. In so viele Teile wird die Saite AB geteilt, und man setze den Saitenteiler so, dass er die Mitte zwischen 243 und 256 Teilen bildet. Die zum Klingen angeregten Abschnitte erklingen im Limma.

Proposition XXII

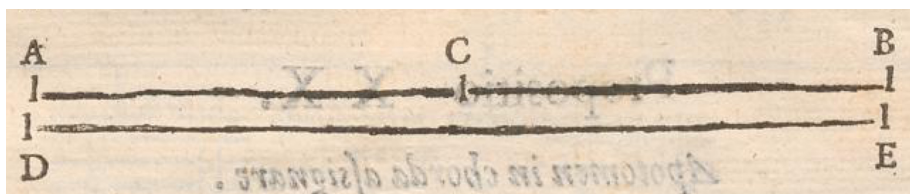
Wie man die enharmonische Diësis auf der Saite bestimmt

Man addiere 128 zu 125, die Verhältniszahlen der enharmonischen Diësis, erhält 253 und teile die Saite in ebenso viele Teile. Wenn man <180> den Saitenteiler zwischen [128] und [125] Teile gesetzt hat, erklingen sie in dem Intervall, die man die enharmonische Diësis nennt.

Proposition XXIII

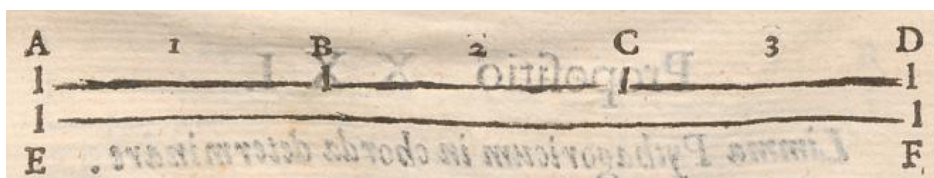
Eine andere Art der Teilung des Monochords

In den vorausgegangenen Sätzen ist, wenn ich mich nicht täusche, hinreichend gezeigt worden, mit welcher Methode wir auf nur einer Saite durch ihre Teilung zur Kenntnis der musikalischen Proportionen gelangen können. Doch will ich hier noch kurz eine andere Methode vorstellen, mit der wir die erwähnten Proportionen durch zwei Saiten finden können, indem wir nur die eine Saite teilen, die andere nicht. Wer also nach dieser Methode die Konsonanzen erforschen will, der spanne die Saiten AB und DE von gleicher Länge und Stärke gleichmäßig auf einen Klangkörper, sodass sie im Einklang sind. Möchte er aber die Oktave erklingen lassen, soll er die Saite AB in Punkt C gemäß der Proportio dupla zweiteilen, welche dieser Konsonanz zugeordnet ist. Danach bringt er entweder den Abschnitt AC oder CB zum Klingen, und zusammen mit dem Ton der ungeteilten Saite DE wird er die gesuchte Oktave hören.



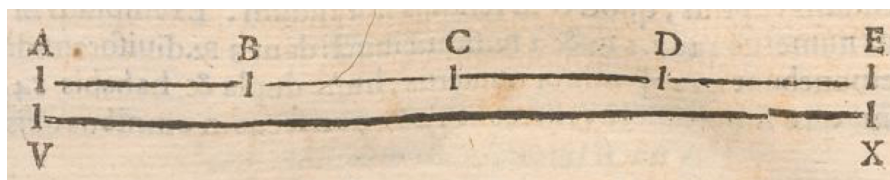
Wünscht einer wiederum die Quinte, erhält er sie so: Man teile die Saite A[D] in drei gleiche Teile (AB, BC und CD) und setze einen Saitenteiler unter Punkt C. Wenn man nun den Abschnitt A[C] anschlägt, klingt er mit der ungeteilten Saite EF in der gesuchten Konsonanz

der Quinte. Beweis: Da die Konsonanz der Quinte in der Proportio sesquialtera 3 : 2 steht und sich so auch der Abschnitt AC zu AD oder EF verhält, muss der Abschnitte AC zu AB oder EF in der Quinte erklingen. Da ja AC zu AB oder EF sich wie zwei Teile zu drei Teilen verhält, so verhält sich der Ton von AC zum Ton von AD oder EF, die gleich und im Einklang sind. Diese Konsonanz ist aber die Quinte. Wir haben also wie beabsichtigt auf der Saite die Quinte bestimmt.



Möchte man die Quarte bestimmen, so muss man die Saite AE in vier gleiche Teile teilen und den Saitenteiler nach dem dritten Teil unter Punkt D setzen. Dann wird der Abschnitt AD zu AE oder der ungeteilten Saite VX in der Quarte erklingen, da ja die Quarte in der Proportio sesquitertia steht, deren Verhältnis 3 : 4 ist, und da in diesem Verhältnis auch die Abschnitte AD zu VX oder AE stehen, die wir ja in vier Teile geteilt haben. Es ist dann notwendig, dass, wie der Abschnitt AD – die drei Teile der Saite – sich zur ganzen Saite AE – den vier Teilen – verhält, so auch der Ton von AD zum Ton von AE oder der Saite VX. Diese Töne erklingen in der Quarte, die man gesucht hat.

<181>



Genau so findet man auch die anderen Intervalle der Konsonanzen und Dissonanzen. Das ist die einfachste aller Methoden. Wenn man nämlich eine von zwei Saiten in genauso viele Teile teilt, wie der größere Wert der Proportion Einheiten hat, muss der Saitenteiler unter den Teil gesetzt werden, der die Zahl des kleineren Werts der Proportion hat. Ein Beispiel: Da die große Terz in der Proportio sesquiquarta besteht und sich 4 : 5 verhält, ist der größere Wert dieser Proportion 5, der kleinere 4. Dem größeren Wert der Proportion gemäß wird die Saite in fünf gleiche Teile geteilt, der Saitenteiler aber nach dem vierten Teil gesetzt, wie es der kleinere Wert angibt. Das klingt notwendig wie 4 : 5, die vier Teile lassen im Verhältnis zu den fünf also die gesuchte große Terz erklingen. Nicht anders muss man verfahren, wenn man die Oktave mit Quarte auf der Saite bestimmen will. Da diese Konsonanz in der Proportion 3 : 8 steht, teilt man die ganze Saite in acht Teile und setzt den Saitenteiler nach dem dritten Teil, so dass diese drei Teile im Verhältnis zur ganzen Saite in der Oktave mit Quarte erklingen. Da das alles sonnenklar ist, kann man, wenn man das eine oder andere Beispiel studiert hat, die übrigen Intervalle ohne Mühe selbst bilden und begreifen.

Aus dem bisher Gesagten ist deutlich geworden, wie einfach die einzelnen Konsonanzen und Dissonanzen auf einer Saite bestimmt werden können. Jetzt wollen wir uns anschauen, mit welcher Methode wir eine gegebene Zahl so teilen können, dass die Teile eine bestimmte Konsonanz ergeben. Das soll alles geschehen zu Gunsten derer, die sich an algebraischen Operationen erfreuen.

Kapitel [V]

Die Teilung des Monochords oder die harmonische Algebra

Da die Algebra der göttlichere Teil der Mathematik ist, erscheint es mir gut, damit sie den größten Platz bezüglich der für die Musik charakteristischen Zahlen einnimmt, an dieser Stelle eine neue Methode anzufügen, die, soweit ich weiß, bisher von keinem mitgeteilt worden ist. Mit ihr können wir das Monochord auf algebraische Weise teilen: das heißt, wir können jede beliebige Zahl so teilen, dass die Teile eine bestimmte Konsonanz hervorbringen. Ich möchte hier eine Methode vorstellen, die so leicht ist, dass ich darauf vertrauen kann, dass auch Anfänger daraus ungezählte Beispiele ziehen können, durch die sie sich wunderbar in den Grundlagen der Algebra zurechtfinden werden.

Proposition I

*Wie man eine beliebige Zahl so teilt, dass die Teile 2 : 1 ergeben,
die Konsonanz der Oktave*

Gegeben sei zum Beispiel die Zahl 369, die so geteilt werden soll, dass der größere Teil doppelt so groß sein wie der kleinere und die derart geteilte Saite in der Oktave erklingen soll. Man setze also für die kleinere Zahl x , für die größere $2x$. Zählt man diese beiden Wurzeln $1R$ und $2R$ zusammen, ergibt das $3x$. Diese $3x$ sollen der gegebenen Zahl 369 entsprechen. Die teilt man nun nach den Regeln der Algebra durch $3x$ und erhält 123 als kleinere Zahl. Wenn man diese verdoppelt, ergibt das 246 für die größere Zahl, also muss $246 : 123$ sich verhalten wie $2 : 1$. Wenn man also eine Saite in 369 Teile teilte und den Saitenteiler nach 123 Teilen setzte, würden 123 zu 246 Teile in der gegebenen Konsonanz der Oktave erklingen. Wenn sich jedoch bei einer Teilung irgendwo Brüche ergeben sollten, müsste man sie zuerst nach den Regeln für Brüche in ihre kleinsten Werte auflösen und **<182>** dann verfahren wie zuvor, was auch bei den restlichen [Verfahrensweisen] gilt. Ein Beispiel für Brüche: Gegeben sei die Zahl 1.267. $1x$ plus $2x$ ergibt abermals $3x$, den Teiler. Man teilt also 1.267 durch 3, das ergibt $422\frac{1}{3}$ für die kleinere Zahl. Dies verdoppelt ergibt $844\frac{2}{3}$ für die größere Zahl. Beide addiert ergeben 1.267. Genau so geht man bei allen übrigen Zahlen vor.

Proposition II

Wie man eine beliebige Zahl so teilt, dass die Teile sich verhalten wie 3 : 1, die Oktave mit Quinte

Gegeben sei die Zahl 848. Wieder setze ich für die kleinere Zahl der Proportion $1x$ an, für die größere $3x$. Addiert ergeben sie $4x$ und sollen der Zahl 848 entsprechen. Wenn diese Zahl nach den Regeln der Algebra durch 4 geteilt wird, ergibt das 212 für die kleinere Zahl. Verdreifacht man dies, so ergibt sich 636 als größere Zahl. Beide zusammengezählt stellen die 848 wieder her. Die Zahlen 636 und 212 verhalten sich also wie 3 : 1, die Proportion der Oktave mit Quinte. Teilte man so eine Saite in 848 Teile und setzte den Saitenteiler derart, dass auf der einen Seite 636, auf der anderen 212 Teile blieben, würde die Saite in der besagten Oktave mit Quinte erklingen.

Proposition III

Wie man eine beliebige Zahl so teilt, dass die Teile in der Doppeloktave erklingen, die in der Proportion 4 : 1 steht

Es sei die gegebene Zahl 365 so zu teilen, dass die größere Zahl viermal größer ist als die kleinere. $1x$ für die kleinere und $4x$ für die größere Zahl ergibt zusammengezählt $5x$. $5x$ soll 365 entsprechen. Diese Zahl durch 5 geteilt ergibt 73 als kleinere Zahl, und diese vervierfacht 292 als größere. Teilte man eine gegebene Saite in 365 Teile und setzte den Saitenteiler so, dass links 73, rechts 292 Teile stünden, müsste sie notwendigerweise in der gesuchten Doppeloktave erklingen.

Proposition IV

Wie man eine beliebige Zahl so in zwei teilt, dass die Teile in der Konsonanz der Quinte 3 : 2 erklingen

Gegeben sei die Zahl 360. Man setze für die kleinere Zahl $2x$, für die größere $3x$. Ihre Summe ist $5x$, die der Zahl 360 entsprechen soll. Man teilt also nach der Regel $360 / 5$ und erhält 72. 72×2 ergibt 144, die kleinere Zahl der Proportion. Dann multipliziert man 72×3 und erhält mit 216 die größere Zahl. Somit stehen 216 : 144 in der Proportio sesquialtera. Teilt man eine Saite in 360 gleiche Teile und setzt den Saitenteiler genau zwischen den Abschnitt mit 216 und den mit 144 Teilen, dann werden die beiden Abschnitte zueinander in der Quinte erklingen.

Proposition V

*Wie man eine beliebige Zahl so teilt,
dass die Teile die Konsonanz der großen Terz 4 : 5 ergeben*

Gegeben sei 367. Man setzt für die kleinere Zahl $4x$, für die größere $5x$. Zusammen ergeben sie 9, den Teiler für die Zahl 367. Die Division ergibt $40\frac{7}{9}$. Multipliziert man dieses Ergebnis mit beiden Wurzelzahlen 4 und 5, ergeben sich $160\frac{28}{9}$ und $200\frac{35}{9}$, die gemeinsam die 367 wiederherstellen. Teilt man eine Saite auf diese Art, so dass links $160\frac{28}{9}$ und rechts $200\frac{35}{9}$ Teile sind, erklingt ein Abschnitt zum anderen in der Konsonanz der großen Terz.

Proposition VI

*Wie man eine beliebige Zahl so teilt,
dass die Teile in der kleinen Terz 5 : 6 erklingen*

Gegeben sei die Zahl 440. Man setzt für die kleinere Zahl $5x$, für die größere $6x$. Die gegebene Zahl wird durch ihre Summe 11 geteilt, das ergibt 40. Diese mit 5 und 6 multipliziert ergibt einmal 200 und dann 240, die Proportio sesquiquinta der kleinen Terz. Eine gemäß dieser Zahlen durch den Saitenteiler geteilte Saite erklingt im Klang der gesuchten kleinen Terz.

Proposition VII

*Eine gegebene Zahl so teilen,
dass die Abschnitte in der [großen] Sexte erklingen,
das heißt in der Proportio super[bi]partiens tertias wie 5 : 3*

Gegeben sei 360. Man setzt für die kleinere Zahl $3x$, für die größere $5x$, die Summe ist $8x$. Man teile also 360 durch 8 und erhält 45. Wenn man diese Zahl mit beiden Wurzelzahlen multipliziert, erhält man die Produkte 135 und 225, die die Proportion der [großen] Sexte bilden. Wird eine Saite so durch den Saitenteiler geteilt, erklingen die Abschnitte in dieser Proportion.

Proposition VIII

Wie man eine gegebene Zahl so teilt, dass die Abschnitte im Ganzton erklingen, das heißt in der Proportio sesquioctava 9 : 8

Gegeben sei die Zahl 3.604. Man setzt für die kleinere Zahl $8x$, für die größere $9x$. Ihre Summe ist $17x$. So dividiert man 3.604 durch 17 und erhält 212. Diese Zahl, mit beiden Wurzelzahlen 8 und 9 multipliziert, ergibt die Produkte 1.696 und 1.908. Eine durch den Saitenteiler so in 3.604 Teile geteilte Saite, dass links 1.696 und rechts 1.908 Teile sind, erklingt im gesuchten Ganzton.

<184>

Proposition IX

Wie man eine beliebige Zahl in so viele Teile teilt, dass die Abschnitte jede beliebige gegebene musikalische Proportion ergeben

Gegeben sei die Zahl 600, die so geteilt werden muss, dass der erste Teil im Verhältnis zum zweiten in der Oktave, der zweite zum dritten in der Quinte, der dritte zum vierten schließlich in der Quarte erklingt. Das heißt, der erste Teil steht zum zweiten in der Proportio dupla, der zweite zum dritten in der Proportio sesquialtera und der dritte zum vierten in der Proportio sesquitertia, also so:

1	Oktave	2	Quinte	3	Quarte	4
---	--------	---	--------	---	--------	---

Wenn man all ihre Wurzelzahlen addiert, ergibt sich $10x$. Dies soll der vorgegebenen Zahl 600 entsprechen. Man dividiert sie also durch 10, was 60 ergibt. Wenn man nun die Zahlen von eins bis vier jeweils damit multipliziert, erhält man die Zahlen, die zueinander in der Oktave, Quinte und Quarte erklingen:

Exemplum .			
60	60	60	60
1	2	3	4
60	120	180	240
Diapason dupla	Diapente sesquialtera	Diateffaron sesquit.	Diatessaron sesquit.

Teilte man eine Saite in 600 Teile und setzte unter die einzelnen Anzahlen Saitenteiler, würden die Teile zueinander in den drei gesuchten Konsonanzen erklingen.

Ein anderes Beispiel:

Wie man eine beliebige Zahl so teilt, dass die erste Zahl im Verhältnis zur zweiten in der großen Terz, die zweite zur dritten in der Quinte, die dritte zur vierten in der Oktave steht: d. h., dass die erste Zahl sich zur zweiten verhält wie 5 : 4, die Proportio sesquiquarta, die zweite zur dritten wie 4 : 6, die Proportio sesquialtera, die dritte zur vierten wie 6 : 12, die Proportio dupla

Gegeben sei die Zahl 59.562, die in die vorgegebenen Proportionen zu teilen ist. Man setzt der Reihe nach die Wurzelzahlen der Proportionen an als 5x, 4x, 6x, 12x, deren Summe 27x ergibt. Eine vollkommene Gleichheit hat man, wenn wir die vorgegebene Zahl durch 27 teilen, was 2.206 ergibt. Mit dieser Zahl werden nun die einzelnen Wurzelzahlen multipliziert, und als Ergebnis erhält man die Zahlen, die zueinander in den gewünschten Proportionen stehen, wie folgt:

$\begin{array}{r} 2.206 \\ 5 \\ \hline 11.030 \\ A \end{array}$	$\begin{array}{r} 2.206 \\ 4 \\ \hline 8.824 \\ B \end{array}$	$\begin{array}{r} 2.206 \\ 6 \\ \hline 3.236 \\ C \end{array}$	$\begin{array}{r} 2.206 \\ 12 \\ \hline 26.472 \\ D \end{array}$
Terz	Quinte		Oktave

Teilte man so eine Saite in 59.562 Teile und setzte vier Saitenteiler bei den Positionen A, B, C und D, dann würde A zu B in der Terz, B zu C in der Quinte und C zu D in der Oktave erklingen, also in den gewünschten Konsonanzen.

<185>

Corollarium I

Durch die besagten Beispiele wird deutlich, wie man mit dieser Methode nicht nur die Konsonanzen, sondern auch das gesamte Tonsystem auf der Saite angeben und bestimmen kann. Das ist eine Sache, die bisher ebenso neu wie wunderbar und bequem ist. Will jemand zum Beispiel das Tetrachord Hypaton auf einer Saite festlegen, so hat er nichts anderes zu tun, als zwei Ganz- und einen kleinen Halbton in ständiger Abfolge durch ihre Wurzelzahlen auf der Saite aufzuzeigen und dann so zu verfahren, wie es in den Beispielen oben angegeben ist.

Corollarium II

Es ist somit klar, auf welche Weise man mit dieser wundersamen Kunst ohne große Mühe eine ganze Tonleiter auf einer Saite festlegen kann. Da dies alles aus dem Vorhergehenden leicht verständlich und auch aus sich selbst klar wird, könnte ein wissbegieriger Leser es

ebenso leicht umsetzen. Nachdem die Methode gezeigt wurde, mit der man einfache Konsonanzen einzeln auf einer Saite bestimmen kann, bleibt nur noch zu lehren, wie all die besagten Konsonanzen und Dissonanzen und sogar das System der gesamten musikalischen Tonleiter durch ständige Teilung einer Saite bestimmt werden und wie man dadurch ein in allen Zahlen vollkommenes Monochord herstellen kann.

Kapitel V[I]

Das diatonische Monochord oder Konstruktion und Teilung eines diatonischen Monochords

Vorbemerkung

Drei Arten von Monochord können wir hier betrachten: das diatonische oder natürliche, das chromatische und das enharmonische. Vom diatonischen gibt es wiederum zwei Arten: das pythagoreische und das ptolemäische. Alle werden der Reihe nach kurz behandelt. Zuvor wollen wir aber einige Lemmata vorausschicken, mit deren Hilfe wir bei der Darstellung der Monochorde gesicherter vorgehen können.

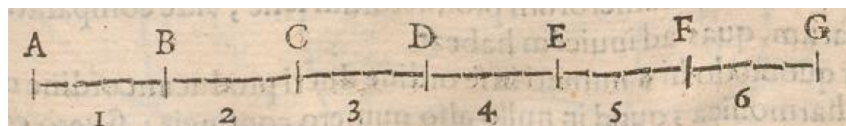
Lemmata zur Harmonie

Die Teilung der musikalischen Intervalle

Lemma I

Wenn eine Saite in sechs gleiche Teile geteilt wird, erhält man genau fünf konsonante Intervalle.

Wenn die Saite AG in sechs gleiche Teile geteilt wird, werden die Abschnitte AB, BC, CD, DE, EF und FG erklingen,



und zwar:

- AC zu BC in der Oktave, die in der Proportio dupla steht.
- AC zu AD in der Quinte, der Proportio sesquialtera.
- AD zu AE in der Quarte, der Proportio sesquiertia.
- AE zu AF in der großen Terz, der Proportio sesquiquarta.

<186> AF zu AG in der kleinen Terz, der sesquiquinta.

So zeigt die fünfmalige Teilung der Saite AG die wichtigsten konsonanten Intervalle an.

Die wunderbare Eigenheit der Sechsheit

Die Sechsheit [senarius] ist nach den Verfahren der geheimen Arithmetik die erste der vollkommenen Zahlen, weshalb sie sich bestimmter Vorzüge zu erfreuen scheint, die wir im zehnten Buch genauer untersuchen werden, wo alle Geheimnisse offen gelegt werden sollen, die in der Natur schlummern. Wenn man die Sechszahl im Kreis anordnet, wie in der nachfolgenden Darstellung geschehen [S. 187], dann sieht man, dass sich jede Zahl zur anderen so verhält, dass sie, egal wie man sie einander zuordnet, immer ein konsonantes Intervall ergibt. Tatsächlich tut sich hier das Geheimnis der gesamten Musik auf. Es ist ebenfalls wunderbar in dieser Anordnung, dass die Formen von je zwei beliebigen vollkommenen Konsonanzen durch eine dazwischenliegende Zahl gemäß der musikalischen Proportion in zwei Teile geteilt werden.

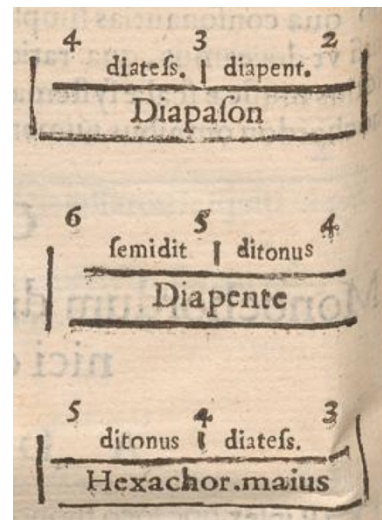
So sieht man, dass zwischen 4 und 2 – der Proportio dupla, also der Oktave – die 3 steht, welche die Oktave in Quinte und Quarte oder die Proportio sesquialtera, also $3 : 2$, und die sesquitertia, also $4 : 3$, teilt. So wird die Oktave in die beiden Konsonanzen aufgelöst, aus der sie besteht.

Auf gleiche Weise sieht man, dass zwischen 6 und 4 – der Proportio sesquialtera oder der Quinte – die 5 steht, welche die Quinte in die Konsonanzen teilt, aus der sie besteht, also aus der großen Terz, der Proportio sesquiquarta $5 : 4$, und der kleinen Terz, der Proportio sesquiquinta $6 : 5$.

Zwischen 5 und 3 wiederum, der Proportion der großen Sexte, steht in der Mitte 4, welche die besagte Sexte in die Konsonanzen teilt, aus denen sie besteht, nämlich in die Quarte mit der Proportion $4 : 3$ und die große Terz mit der Proportion $5 : 4$.

Zudem haben diese sechs in natürlicher Reihenfolge geordneten Zahlen die verborgene Eigenheit, dass sie, sowohl wenn sie mit sich selbst als auch mit den anderen Zahlen in der Reihe multipliziert werden, immer Zahlen ergeben, die in natürlicher Reihenfolge (wenn man die größere der nächstkleineren Zahl gegenüberstellt) eine musikalische Proportion darstellen. Damit der Leser erkennt, was ich meine, füge ich hier das Verfahren für die gesamte Operation an.

Die sechs Zahlen werden in natürlicher Reihenfolge aufgeführt. Dann, sage ich, werden sie erst mit sich selbst, dann jede mit jeder anderen multipliziert. Das ergibt immer neue Formen von musikalischen Proportionen. Man führt nun die Zahlen auf ihre natürliche Reihenfolge zurück und stellt die größere der nächstkleineren gegenüber. Auf folgende Weise:



$1 \times 1 = 1$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 3 = 9$	$4 \times 4 = 16$	$5 \times 5 = 25$	$6 \times 6 = 36$
$1 \times 2 = 2$	$2 \times 3 = 6$	$3 \times 4 = 12$	$4 \times 5 = 20$	$5 \times 6 = 30$	
$1 \times 3 = 3$	$2 \times 4 = 8$	$3 \times 5 = 15$	$4 \times 6 = 24$		
$1 \times 4 = 4$	$2 \times 5 = 10$	$3 \times 6 = 18$			
$1 \times 5 = 5$	$2 \times 6 = 12$				
$1 \times 6 = 6$					

Auch in der folgenden Aufstellung der multiplizierten Zahlen möge man die harmonischen Verhältnisse beachten, in denen sie untereinander stehen.

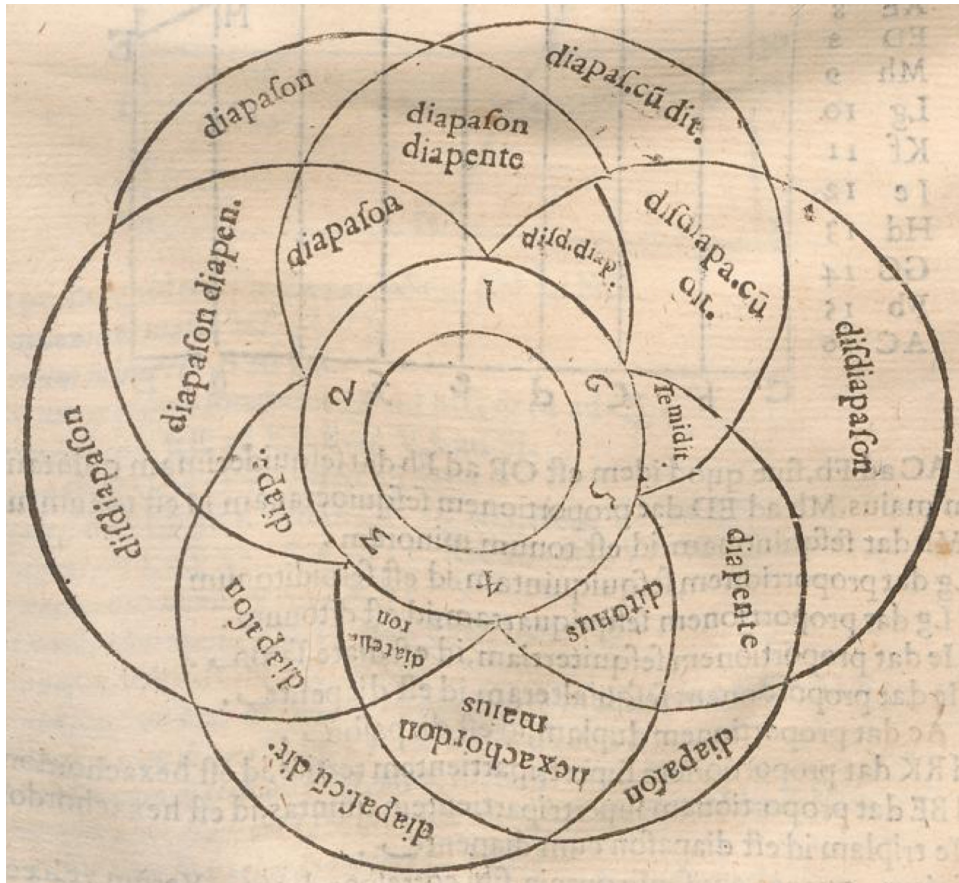
Man sieht hier, wie diese sechs Zahlen, wenn sie der Reihe nach multipliziert werden, immer die musikalischen Intervalle in natürlicher Reihenfolge ergeben, was bei keiner anderen Zahl [als der Sechs] der Fall ist. Wenn man diese Zahlen, beliebig angeordnet, miteinander in Beziehung setzt, sieht man, dass keine einzige harmonische [= konsonante] Proportion fehlt. So ist das Verhältnis 1 : 3 die Oktave mit Quinte, 1 : 4 die Doppeloktave und so weiter. Folglich könnte man diese Zahl die absolut harmonische Zahl [numerus absolute harmonicus] nennen, die sehr schön die göttliche Idee bei der Schöpfung der Dinge ausdrückt, wie im zehnten Buch gezeigt wird. <187> Es folgt eine Aufstellung der sechs Zahlen, die mit sich selbst multipliziert werden, und dazu die musikalischen Intervalle:

1	} Oktave.
2	} Quinte
3	} Quarte
4	} Große Terz
5	} Kleine Terz
6	} Quarte
8	} Großer Ganzton
9	} Kleiner Ganzton
10	} Kleine Terz
[12]	} Große Terz.
15	} [Großer] Halbton
16	} Großer Ganzton
18	} Kleiner Ganzton
20	} Kleine Terz.
24	} Kleiner Halbton
25	} Kleine Terz.
30	} Kleine Terz.
36	

Bevor ich zum Schluss komme, möchte ich hier noch ein Experiment anfügen, aus dem die Bedeutung dieser Sache noch klarer wird.

Musikalisches Experiment mit dem Senarius

Wenn jemand sechs Saiten entsprechend den musikalischen Proportionen mit diesen sechs Zahlen der Reihe nach spannt und auf diese Weise bewirkt, dass die erste zur zweiten in der Oktave, die zweite zur dritten in der Quinte, die dritte zur vierten in der Quarte, die vierte zur fünften in der Terz und die fünfte zur sechsten in der kleinen Terz erklingt, und sie alle gleichzeitig anschlägt, wird er eine über alle Maßen vollkommene Harmonie hören, wie man sie kaum lieblicher wahrnehmen kann.²



Sollte aber diese Anordnung <188> unterbrochen werden, geht die Konsonanz sofort in eine für die Ohren unerträgliche Dissonanz über.

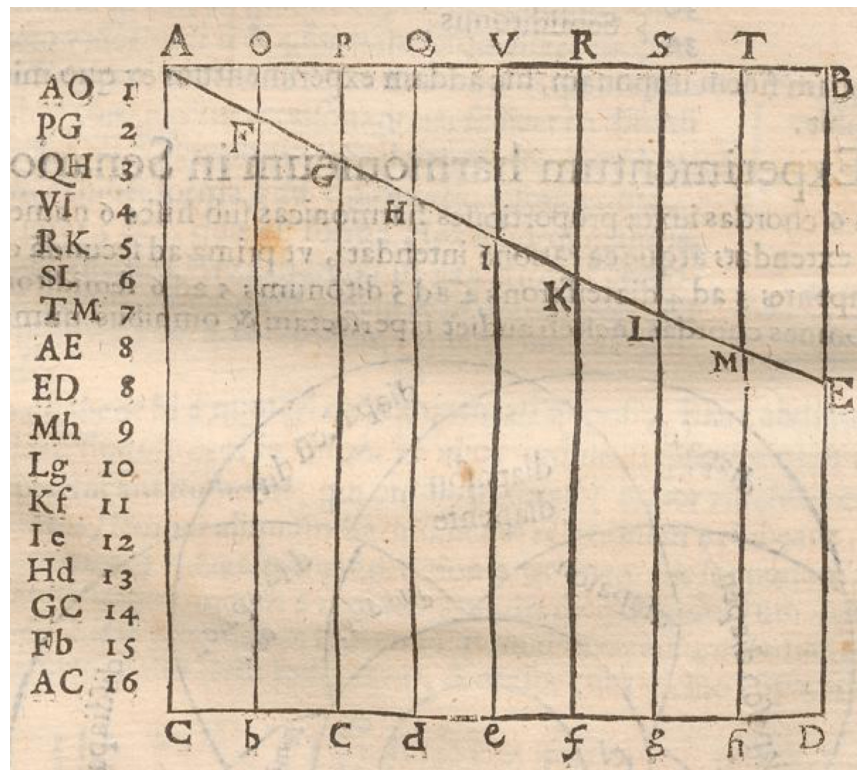
Daraus mag man erkennen, wie wunderbar Kraft und Wirkung der Sechs sind. Man schaue sich weiterhin an, was wir darüber im dritten Buch auf Seite 100 gesagt haben.

² Die folgende Abbildung des Senario hat Kircher aus Zarlinos *Istitutioni harmoniche* übernommen.

Lemma II

Wenn man ein beliebiges Quadrat in acht gleiche Rechtecke [parallelogramma] aufteilt und von einem beliebigen Winkel aus eine gerade Linie zieht, welche die Seite des letzten Rechtecks in der Mitte teilt, dabei die Seiten der anderen Rechtecke schräg in ungleiche Teile zerteilt, dann ergeben sich daraus alle in der ganzen Musik gebräuchlichen διαστήματα oder Intervalle.

Gegeben sei das Quadrat ABCD, das in acht gleiche Rechtecke geteilt wird. Vom Winkel A aus zieht man eine gerade Linie, welche die äußerste Seite BD bei E halbiert. Dabei werden die anderen Seiten schräg geschnitten und nach den Propositionen IV und X des sechsten Buchs von Euklid notwendigerweise in musikalischer Proportion geteilt. Wovon BE acht Teile hat, davon hat TM sieben, SL sechs, RK fünf, VI vier, QH drei, PG zwei und OF einen. Ich sage nun, dass aus dieser Teilung alle musikalischen Intervalle deutlich werden. Ich zeige das durch Induktion.



Zunächst ergibt AC zu Fb oder, was dasselbe ist, OF zu Fb die Proportio sesquidecima quinta [16 : 15] oder den großen Halbton. Mh zu ED gibt die Proportio sesquioctava [9 : 8], das ist der große Ganzton.

Lg zu Mh die sesquinona [10 : 9], den kleinen Ganzton.

Ic zu Lg die sesquiquinta [6 : 5], die kleine Terz.

ED zu Lg die sesquiquarta [5 : 4], die große Terz.

Mh zu Ic die sesquitercia [4 : 3], die Quarte.

Ed zu Ic die sesquialtera [3 : 2], die Quinte.

ED zu Ac die dupla [2 : 1], die Oktave.

QH zu RK die super[bi]partiens tertias [5 : 3], die große Sexte.

RK zu BE die supertripartiens quintas [8 : 5], die kleine Sexte.

VI zu Ie die tripla [3 : 1], die Oktave mit Quinte.

Man sieht also, wie alles zusammen klingt. Damit man das alles durch die Praxis lernt, noch ein Experiment:

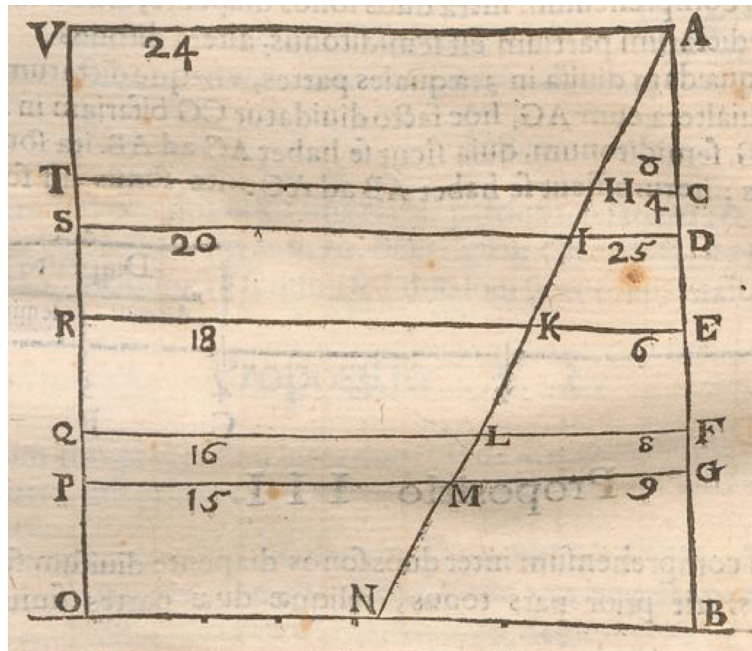
<189>

Ein harmonisches Experiment

Man nehme ein hölzernes Quadrat, das durch gleich stark gespannte Saiten in acht Rechtecke geteilt wird. Dann schneidet man den ganzen Aufbau [systema] zusammen mit den Saiten bei AE durch eine Magadis oder einen Saitenteiler. Die Prüfung ergibt, dass AC zu BE in der Oktave klingt, Ed zu Ie in der Quinte, Mh zu Ie in der Quarte und so weiter mit allen Konsonanzen, wie es eben vorgestellt wurde. Hier sieht man, wie in der Zahl 8 alle Harmonie und die ganze Musik enthalten ist.

*Eine andere Teilung nach Ptolemaios, die Helikon genannt wird
und die ebenfalls sämtliche Konsonanzen enthält*

Man konstruiert ein Quadrat VAOB, dessen Seite AB zunächst in E halbiert, dann durch G, E, C in vier gleiche Teile und schließlich durch F und D in drei gleiche geteilt wird. Nun zieht man durch die Teilungspunkte die parallelen Linien CT, DS, RE, FQ und GP. Anschließend wird eine Linie AN vom Winkel A aus hin zur Mitte der Seite OB gezogen. Damit erhält man das vollständige Instrument, in dem sämtliche Konsonanzen enthalten sind.



Zuerst bildet natürlich BN zu NO den *Einklang*, dann:

<i>großer Halbton</i>	MP zu LQ,
<i>kleiner Ganzton</i>	IS zu RK,
<i>großer Ganzton</i>	LF zu MG und SI zu QL,
<i>kleine Terz</i>	RK zu PM und auch VA zu SI,
<i>große Terz</i>	PM zu ON und SI zu QL,
<i>Quarte</i>	LF zu KE und ON zu MG und VA zu RK,
<i>Quinte</i>	TL zu XN, ON zu LF, RK zu ON, VA zu QL,
<i>kleine Sexte</i>	VA zu PM,
<i>große Sexte</i>	PM zu MG, SI zu ON,
<i>Oktave</i>	VA zu ON, QL zu LF,
<i>Oktave mit kleinem Ganzton</i>	SI zu MG,
<i>mit großem Ganzton</i>	RK zu LF,

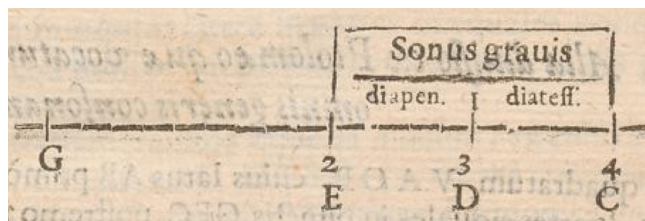
<i>Oktave mit großer Terz</i>	SI zu LF, PM zu KE,
<i>Oktave mit Quarte</i>	QL zu KE, VA zu LF,
<i>Oktave mit Quinte</i>	ON zu HC, RK zu KE, VA zu MG,
<i>Oktave mit großer Sexte</i>	SI zu KE,
<i>Doppeloktave</i>	QL zu HC, VA zu KE,
und so weiter.	

<190>

Proposition I

Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine Oktave ausmacht, in der Mitte teilt, ergibt sich als ein Teil die Quinte, als der andere die Quarte

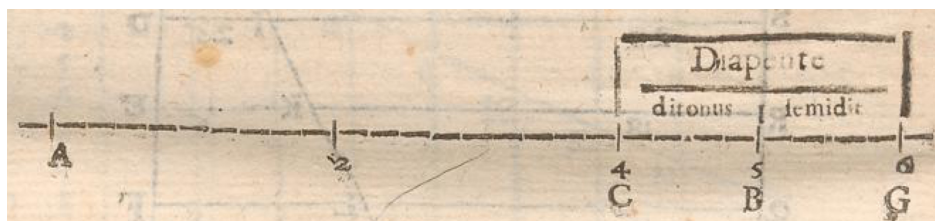
Gegeben sei die Oktave GC, die im Punkt E in die Klänge GE und EC zweigeteilt wird. Wenn man EC in D ebenfalls in zwei teilt, bildet, wie ich behaupte, ED mit GD die Quinte und DC mit GC die Quarte. Denn der Ton EG zu GD verhält sich wie 2 : 3, und der Ton CD zu GC wie 3 : 4. Also ist der Satz erwiesen.



Proposition II

Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine Quinte ausmacht, in zwei gleiche Teile teilt, wird der eine Teil eine große Terz, der andere die kleine Terz sein

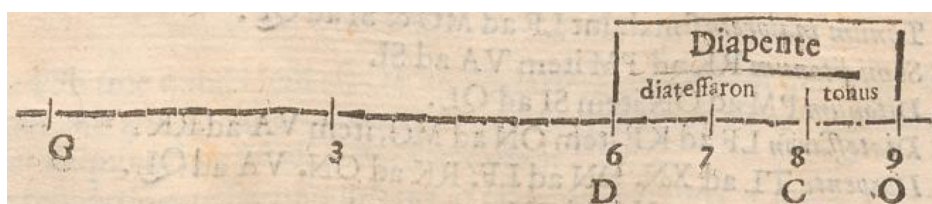
Man teile eine Strecke in drei gleiche Teile, von denen einer CG ist. CA wird zu AG dann in der Proportio sesquialtera stehen. Dann teile man CG in B in zwei Teile. Nun ergibt CB die große Terz und BG die kleine Terz. Denn wie sich die Strecken AG zu AB verhalten, so auch die Klänge, nämlich als kleine Terz.



Proposition III

Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine Quinte ausmacht, in drei gleiche Teile unterteilt, ergibt sich als erster Teil ein Ganzton, die anderen bilden gemeinsam eine Quarte

Man teile die Strecke OG in drei gleiche Teile. GO zu GD ist dann die Quinte. Diese wird wiederum in drei gleiche Teile geteilt. Dann ist CO der Ganzton, DC die Quarte. Der Beweis ergibt sich aus den Zahlenverhältnissen.

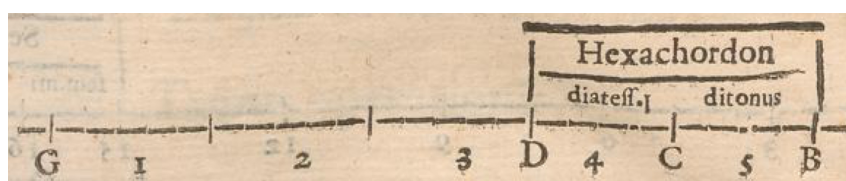


Proposition IV

Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine große Sexte ausmacht, in zwei gleiche Teile teilt, wird der eine Teil eine große Terz, der andere eine Quarte sein

Man teile eine beliebige Strecke in fünf gleiche Teile, so dass zwei dieser Fünftel zwischen DB eingeschlossen sind. Dann steht GB zu GD in der Proportio super[bi]partiens tertias [5 : 3], in der die große Sexte besteht.

<191>

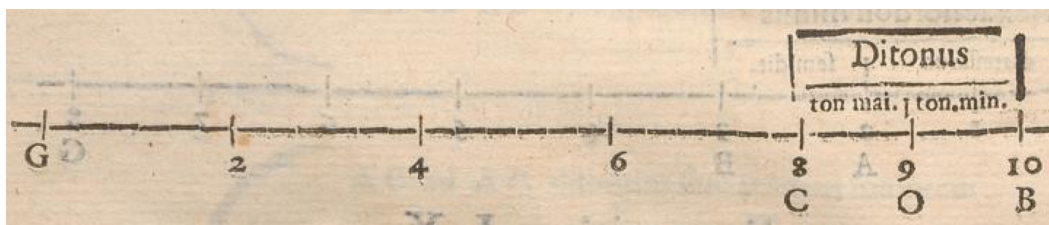


Ich behaupte, dass CB zu CG als große Terz klingt und CD zu DG als Quarte. Es ist nämlich das Verhältnis 5 : 4 die Proportio sesquiquarta, 4 : 3 die Proportio sesquitertia. Wenn der Abschnitt DB zweigeteilt wird, ergibt er also große Terz und Quarte.

Proposition V

Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine große Terz ausmacht, in zwei gleiche Teile teilt, wird ein Teil ein kleiner, der andere ein großer Ganzton sein

Man teile eine beliebige Strecke GB in fünf gleiche Teile, so dass sich GB zu GC in der Proportion der großen Terz oder der Proportio sesquiquarta verhält. Dann teile man CB nochmals in zwei Teile durch O. OB ist dann der kleine Ganzton, CO der große.

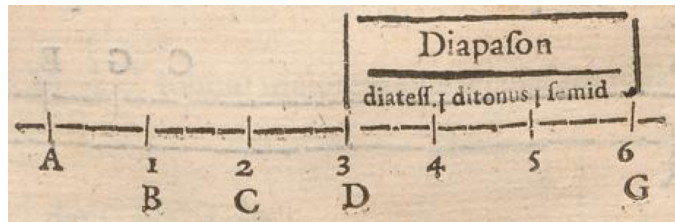


Man teile die fünf Teile, ohne es hinzuschreiben, jeweils in zwei, und der letzte, der fünfte Teil, erhält die Ziffern 8, 9 und 10. Wie sich der Abschnitt GB zu GO verhält, so auch ein Ganzton zum anderen. Und wie GO zu GC, so auch dieser Ganzton: Die Klänge sind der große und der kleine Ganzton, wie die Proposition besagt.

Proposition VI

Wenn man ein Intervall zwischen zwei Töne, das eine Oktave ausmacht, in drei gleiche Teile teilt, wird der erste Teil eine kleine Terz, der mittlere eine große Terz und der dritte eine Quarte sein

Man teile eine Strecke AG im Punkt D in zwei Teile. Die Teile AG zu AD oder DG stehen in der Proportio dupla oder in der Oktave. Dann teile man DG in drei gleiche Teile, AD ebenso. AG zu BG klingt als kleine Terz, BG zu CG als große Terz und schließlich CG zu DG als Quarte. Der Beweis ergibt sich aus den Verhältniszahlen.

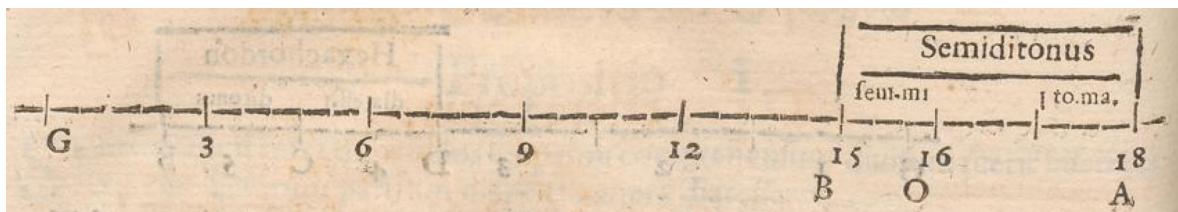


Proposition VII

Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine kleine Terz ausmacht, in drei gleiche Teile teilt, ergeben die ersten beiden gemeinsam einen großen Ganzton, der dritte einen großen Halbton

Die Strecke AG teile man in sechs gleiche Teile. AB ergibt dann das Intervall der kleinen Terz. Dieser Abschnitt wird in drei gleiche Teile geteilt und jeder davon als nochmals zweigeteilt betrachtet. AO ist dann der große Ganzton, OB der kleine. Zusammen ergeben sie die kleine Terz, was aus den Verhältniszahlen deutlich wird.

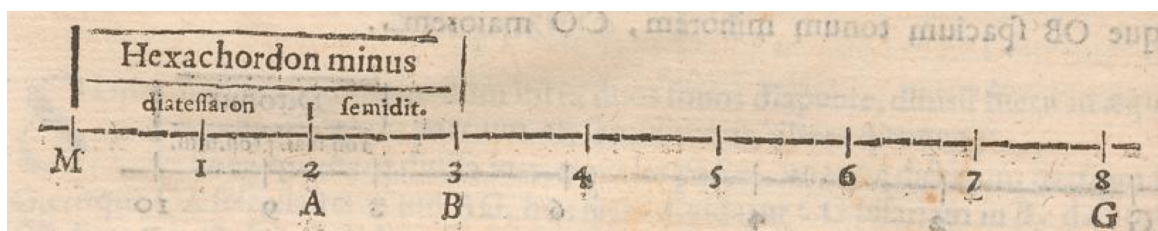
<192>



Proposition VIII

Wenn man ein Intervall zwischen zwei Tönen, das eine kleine Sexte ausmacht, in drei gleiche Teile teilt, wird einer der Teile die kleine Terz, die anderen eine Quarte bilden

Man teile die Strecke MG in acht gleiche Teile, so dass drei davon (MB) die kleine Sexte ergeben. Nimmt man zwei Teile MA zusammen, erhält man die Proportion der Quarte. Der andere Teil AB ergibt die Terz. So bilden diese beiden Intervalle gemeinsam die kleine Sexte.

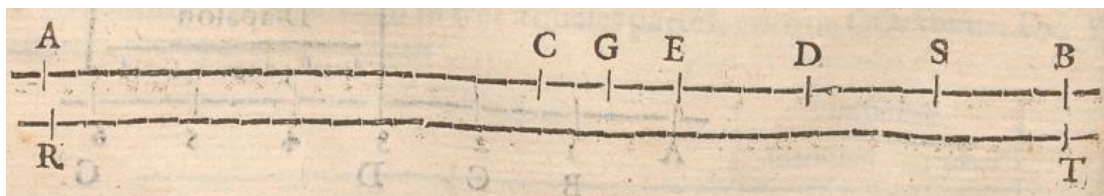


Proposition IX

*Wie man eine mit Stegen [Magades] richtig über ein Brett gespannte Saite
passend als Tonleiter aufteilt*

Es gilt, die Saite AB so zu teilen, dass man ihre abgeteilten Abschnitte immer anhand der anderen Saite RT überprüft, die AB gleich, aber ungeteilt ist. Die Saite AB richtet man wie folgt als Tonleiter ein:

- 1) AB wird im Punkt C zweigeteilt, AC und CB erklingen im Einklang, gemäß dem, was wir oben gezeigt haben. Aber AC und CB erklingen zu RT in der Oktave.
- 2) Wenn man CB im Punkt D zweiteilt, erklingt der Abschnitt AD zur ganzen Saite RT in der Quarte. AC : CD erklingt in der Oktave, AD : AC in der Quinte und AD : CD in der Duodezime, so dass diese einfache Teilung vier verschiedene Konsonanzen erzeugt, zu denen man noch den Einklang von CD : DB und die Oktave CB : RT hinzufügen kann.



- 3) Wenn man CD im Punkt E zweiteilt oder DB im Punkt S, erhält man in AE : AC die große Terz, in AE : CE die große Septdezime [5 : 1], in AC : CE die Quindezime [4 : 1 = Doppeloktave], in AD : ED die Nondezime [6 : 1 = zwei Oktaven plus Quinte], in A[E] zu E[B] die große Sexte, so dass diese dritte Teilung sechs Konsonanzen hervorbringt.
- 4) Wenn man die Teilung im Punkt E annimmt, erhält man in AB zu AE die kleine Sexte, in AB zu BE die [Undezime = Oktave+Quarte] [8 : 3].
- 5) Wenn man EC im Punkt G zweiteilt, ergibt AG zu AC den großen Ganzton und zu AE den kleinen Ganzton. Da man die Saite AB durch diese letzte Teilung in vierundzwanzig Teile aufgeteilt findet, seien nun alle Tonstufen angegeben, welche durch diese letzte Teilung mithilfe der Zahl 24 gefunden werden können.

Typus operationis.

(AB diuifa in C dabit AC ad CB vnifonum.
 (AC ad AB diapafon fiue octauam.

CB diuifa in
D. dabit

AD ad AB diateffaron fiue quartam.
 AC ad CD diapafon fiue octauam:
 AD ad AC diapente fiue quintam.
 AD ad CD diapafon cum diapente fiue duodecimam,
 DB ad AB difdiapafon fiue decimam quintam.

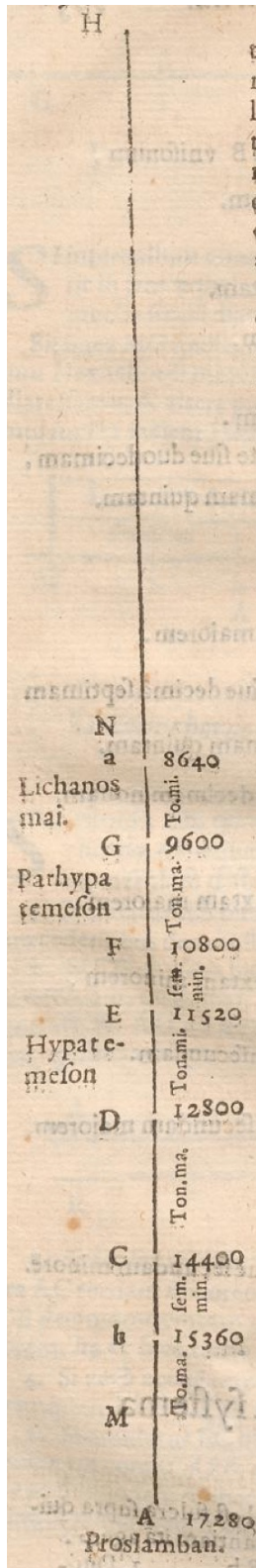
CD diuifa in
puncto E
vel
DB in puncto
F dabit.

AE ad AC ditonum fiue tertiam maiorem.
 AE ad CE difdiapafon cum dit. fiue decimā septimam
 AC ad CE difdiapafon fiue decimam quintam.
 AD ad ED difdiap. diapente fiue decimam nonam.
 AE ad ED hexachordon maius sextam maiorem.
 AB ad AE hexachordon minus sextam minorem.
 AB ad BF trisdiapafon vigefimam fecundam.
 AG ad AC tonum maiorem fiue fecundam maiorem.
 EC diuifa in G dabit
 AG ad AE tonum minorem fiue fecundam minorem.

[Statt »AE ad ED« lies »AE ad EB«.]

Kapitel [V]II

Beschreibung des diatonischen Monochords nach dem ptolemäischen System



Ein Monochord sei mit den Buchstaben MN bezeichnet, die Stege [Magades] mit A und H: Das sind die Stützen, auf denen die Saite ruht. Um nun die erste Konsonanz zu finden, gehe man folgendermaßen vor:

<194>

1) Man teile die Saite AH bei a in zwei gleiche Teile und mache einen Strich auf dem Instrument, der den Punkt a der Saite markiert. Die ganze Saite AH erklingt zu aH in der Oktave. Neben deren tiefsten Ton, den Proslambanomenos, schreibt man die Ziffer 17.280, als ob die gesamte Saite in ebensoviele Teile geteilt wäre. Wir nehmen eine so große Zahl, um Brüche beim Auffinden von kleineren Intervallen zu vermeiden, die bei anderen Zahlen gewöhnlich vorkommen. Man halbiert diese Zahl und schreibt 8.640 neben a.

2) Man teile die Saite AH in drei gleiche Teile, von denen einer AE ist, und macht einen Strich, der den Punkt E bestimmt. Man teilt auch die Zahl des Proslambanomenos in drei gleiche Teile, von denen zwei die Zahl 11.520 ergeben, die man neben den Punkt E schreibt. Wenn man nun den Teil EH gegen die ganze Saite zum Klingen bringt, hört man die Konsonanz der Quinte mit der Proportio sesquialtera.

3) Man teilt den Abschnitt EH in neun gleiche Teile und fügt einen davon unterhalb von E hinzu, nämlich am Punkt D. Teilt man die Zahl 11.520 durch 9 und [multipliziert] mit so vielen Teilen [10], ergibt das 12.800. Das schreibt man an den Punkt D. Der Abschnitt zwischen E und D ist das Intervall des kleinen Ganztons mit der Proportio sesquiquinta 9 : 10.

4) Man teile die Saite AH in sechs gleiche Teile und bezeichne fünf davon mit HC. In gleicher Weise wird die Zahl des Proslambanomenos durch 6 geteilt. Fünf [dieser Quotienten] zusammen ergeben 14.400, was man an den Punkt C schreibt. Die ganze Saite AH erklingt zu HC in der Konsonanz der kleinen Terz mit der Proportio sesquiquinta 6 : 5.

5) Man teile die ganze Saite in acht gleiche Teile, von denen fünf zwischen den Punkten FH und drei zwischen FA liegen. In gleicher Weise teilt man 17.280 durch 8. Fünf Teile ergeben insgesamt 10.800, was man an den Punkt F schreibt. Es erklingt nun die ganze Saite zu FH in der kleinen Sexte mit der Proportio supertripartiens quintas wie [8] : [5].

6) Man teile die ganze Saite in neun gleiche Teile und lege acht davon zwischen H und η . Entsprechend teile man 17.280 durch 9, multipliziere das Ergebnis mit 8 und schreibe 15.360 an b. Die Strecke Ab ist das Intervall des großen Ganztons mit der Proportio sesquioctava wie 9 : 8.

Wenn man das alles richtig gemacht hat, fehlt nur noch der Ton G zwischen F und a. Den erhält man so:

7) Man teile den Abschnitt FH in neun gleiche Teile und lege acht davon von H nach Punkt G. 10.800 wird entsprechend durch 9 geteilt, acht davon ergeben 9.600, was man an den Punkt G schreibt. Damit hat man schließlich die Proportionen sämtlicher Konsonanzen einer Oktave.

Hier sieht man, wie leicht und bequem man dieses Monochord zusammen mit den Verhältniszahlen jeder Konsonanz einrichten kann.

<195>

Kapitel [V]III

Teilung des diatonischen Monochords nach der Skala, oder: Das System der Doppeloktave oder der fünfzehn Saiten

Es soll der Leser aber in der Praxis erkennen, wie man durch eine kunstvolle Teilung das gesamte oder große System (das einige Doppeloktave, andere auch das Pentadekachordon: »das der 15 Saiten«, nennen) auf dem diatonischen Monochord, d. h. in Ganz- und Halbtönen, darstellen kann. Obwohl die fünf Tetrachorde, aus denen das System besteht, oben hinreichend dargestellt wurden, möchten wir dies hier doch kurz wiederholen, damit man sicherer vorgehen kann. Das diatonische System besteht also aus 15 Tönen oder zwei Oktaven. Schon von den Alten ist es kunstvoll in fünf Tetrachorde oder Quartan aufgeteilt worden, weil Quartan sich für diese Aufgabe besser eigneten als Quinten.

Das Verfahren der Teilung des diatonischen Systems in fünf Tetrachorde

Fügt man einer Quarte einen Ganzton hinzu, erhält man die vollkommene Konsonanz, nämlich die Quinte. Fügt man aber der Quinte einen Ganzton hinzu, erhält man die Sexte und macht aus einer vollkommenen Konsonanz eine unvollkommene, die schon fast eine Dissonanz ist. Hinzu kommt noch, dass die Vermehrung zweier Tetrachorde um einen Ganzton die vollkommenste aller Konsonanzen ergibt, die Oktave. Bei Quinten gilt das nicht. Zwei Quinten ergeben immer eine Dissonanz; vermehrt man sie um einen Ganzton, ergibt sich eine große oder kleine Terz, welche die Alten aus der Zahl der Konsonanzen ausschlossen. Das war der Grund, warum sie das große System in fünf Tetrachorde aufteilten. Das erste davon ist das Tetrachrd hypaton, das heißt das unterste, das zweite das meson, das mittlere, das dritte das synnemenon, das der verbundenen Töne, das vierte das diezeugmenon, das der unverbundenen Töne. Das fünfte wurde von den Alten

Tetrachord hyperboleon genannt, das der oberen Saiten. Wie man diese alle auf einem diatonischen Monochord darstellen muss, wollen wir jetzt anschauen.

Man muss wissen, dass jedes Tetrachord aus zwei Ganz- und einem Halbton besteht, und dass das Tetrachord hypaton unter sich noch einen Ganzton hat, den man den Proslambanomenos nennt, den »hinzugenommenen«.

Wenn man die gesamte Saite AB in neun gleiche Teile teilt, ist der neunte Teil der Proslambanomenos oder der erste Ton auf der Saite. Den zweiten Teil stellt C dar, CB : AB den ersten Ganzton. C ist ebenfalls der erste Ton des Tetrachords hypaton. Will man nun, nachdem dieser Ton gegeben ist, das erwähnte Tetrachord vervollständigen, muss man so verfahren:

1. Bezeichnung des Tetrachords hypaton auf dem Monochord

Das Tetrachord hypaton, bei Ptolemaios das »diatonisch-ditonische«, ist nichts anderes als eine Quarte, die aus zwei großen Ganztönen und einem Limma (also der Differenz zwischen einer Quarte und zwei großen Ganztönen) besteht. Addiert man die letztgenannte Differenz zu zwei Ganztönen, so vervollständigt man die Quarte. Wie ein großer Ganzton sich in der Proportio sesquioctava wie 9 : 8 verhält, so bleibt, wenn man ihn verdoppelt und von einer reinen Quarte abzieht, die Proportio supertredecupartiens 243 übrig, die sich wie 256 : 243 verhält.

Wie man auf dem Monochord das diatonisch-ditonische Tetrachord bezeichnet

Hat man diese beiden Töne zusammen mit dem Limma auf dem besagten Monochord nach den im Vorhergehenden mitgeteilten Regeln bezeichnet, so hat man das Tetrachord des diatonischen Diatonum, wie wir es oben beschrieben haben. Um aber dem wissbegierigen Leser keine zusätzliche Mühe zu machen, will ich es hier kurz in Hinblick auf die Praxis wiederholen.

1) Wenn man auf der gegebenen Saite AB den Ganzton vom Proslambanomenos bis zur ersten Saite festgelegt hat, der zwischen A und C liegt, teile man die ganze Saite zwischen C und B in 256 gleiche Teile mit einem Teilungsinstrument [instrumentum partium], [nach dem Diagramm weiter auf S. 197]

DIVISIO SIVE Monochordi Gene Diatonica		COMPOSITIO ris diatonici, dicta Diatona.	
Tet. Diezeug. Tet. Hyper.	2304. Nete hyperboleon	Ton.	O
	2592. Paranete hyperboleon	Ton.	P
	2916. Trita hyperboleon	Se. mi.	Q
	3072. Nete diezeugmenon	Ton.	L
	3456. Paranete diezeugm.	Ton.	M
Tet. Diezeug. Tet. Hyper.	3888. Trita diezeugmenon	Se. mi.	N
	4096. Paramese.	Se. ma.	K
		Se. mi.	R
		Tuono.	G
		Ton.	H
Tetrachor. meson	4608. Mese	Ton.	
	5184. Lychanos meson	Ton.	I
	5832. Parhypate meson	Se. mi.	D
	6144. Hypate meson	Ton.	E
	6912. Lychanos hypaton	Ton.	F
Tetrachor. hypaton	7776. Parhypate meson	Se. mi.	C
	8192. Hypate hypaton	Ton.	A
	9216. Proslambanomenos.		

Tet. Synemenon.

3456. Nete synemenon
 3888. Paranete synemenon
 Tuono
 4374. Trita synemenon
 4608. Mese.

O rana diatonica diatona, que respon-
 det octo intervalis ab A usque ad G.



<197> das man bereithalten muss. Dann sind die 243 Teile die besagte Differenz, die wir »Limma« nennen und die Zarlino den kleinen Halbton nennt. Er liegt zwischen den Punkten C und F, denn CB zu FB erklingt im besagten Intervall.

2) Man teile den Abschnitt FB der Saite in neun gleiche Teile. Der achte Teil ergibt dann den Punkt und die Markierung des großen Ganztons mit der Proportio sesquioctava 9 : 8. FB zu EB klingt nämlich im großen Ganzton. Das Intervall dieses Tones liegt zwischen F und E.

3) Man teile schließlich den Abschnitt EB in neun gleiche Teile, und der achte Punkt ergibt die Markierung des großen Ganztones, genau wie oben. Zwischen EB zu DB erklingt dann der zweite große Ganzton. Damit hat man das gesuchte Tetrachord hypaton des diatonischen Geschlechts zusammen mit den Namen und Zahlen der Töne, wie es in der Darstellung zu sehen ist.

II. Wie man das Tetrachord meson auf dem Monochord bezeichnet

Weil die Intervalle dieses Tetrachords sich vom vorherigen nicht unterscheiden, geht man in gleicher Weise vor, aber wir wollen die Sache kurz darstellen.

1) Man teile den Abschnitt DB durch ein Teilungsinstrument in 256 Teile. 243 davon ergeben nach Zarlino den kleinen Halbton, bei uns das Limma, das auf dem Monochord den Abschnitt zwischen D und I einnimmt.

2) Man teile den Abschnitt IB in neun gleiche Teile, wobei acht Teile den großen Ganzton zwischen den Punkten H und I bestimmen.

3) Man teile HB wiederum in neun gleiche Teile, wobei acht Teile den zweiten großen Ganzton ergeben, der zwischen den Punkten H und G liegt. Damit ist das zweite Tetrachord, das Tetrachord meson, komplett, bei dem man Tonbezeichnungen und Zahlenwerte nach der Unterteilung so hinschreibt, wie man es in der Darstellung eingetragen sieht

III. Wie man das Tetrachord diezeugmenon auf dem Tetrachord bestimmt

Dieses Tetrachord wird »diezeugmenon« genannt, weil es vom Tetrachord meson um einen großen Ganzton getrennt ist. Den bestimmt man auf der Saite, indem man den Abschnitt GB in neun gleiche Teile teilt. Acht Teile davon bestimmen den Ganzton, der zwischen G und K hinzugefügt wird.

1) Wenn man den Abschnitt KB durch ein Teilungsinstrument in 256 Teile teilt, ergeben 243 Teile davon den kleinen Halbton oder das Limma, das zwischen den beiden Punkten K und N liegt.

2) Man teile den Abschnitt NB in neun gleiche Teile, dann ergeben acht davon den Endpunkt des großen Ganztons, der zwischen den Punkten N und M liegt.

3) Man teile wiederum MB in neun gleiche Teile, dann ergeben acht davon den Endpunkt des zweiten großen Ganztons, der zwischen den Punkten M und L liegt, und damit hat man das dritte Tetrachord fertig.

IV. Wie man das Tetrachord hyperboleon auf dem diatonischen Monochord aufteilt

Dieses Tetrachord ist mit dem Tetrachord diezeugmenon im Punkt L verbunden. Von da aus machen wir also seine Aufteilung.

- 1) Man teile den Abschnitt LB in 256 gleiche Teile. 243 davon ergeben in Q den Endpunkt des kleinsten Intervalls, das zwischen L und Q liegt.
- 2) Man teile den Abschnitt QB in neun gleiche Teile, dann ergeben acht Teile Punkt P. QP ist das Intervall des großen Ganztons.
- 3) Nochmals teile man den Abschnitt PB in neun gleiche Teile, acht Teile ergeben Punkt O. Der Abschnitt PO ist das Intervall des zweiten großen Ganztons und damit ist auch das Tetrachord hyperboleon fertig.

<198>

V. Die Aufteilung des Tetrachords synnemenon auf dem diatonischen Monochord

Dieses Tetrachord ist mit den anderen nicht verbunden, sondern wird ihnen gleichsam an die Seite gestellt. Man gehe so vor:

- 1) Man teile den Abschnitt GB in neun gleiche Teile, dann begrenzen acht Teile die Strecke des Tons G. Aber dieses Tetrachord teilt den Ganzton immer in einen kleinen und einen großen Halbton. Um den Abschnitt GK in zwei Halbtöne zu teilen, teilt man diesen Abschnitt in neun gleiche Teile oder Kommata. Zählt man davon fünf vom Punkt G ab, erhält man mit dem Punkt R die Teilung des Ganztons in zwei Halbtöne, von denen GR der kleine, RK der große ist.
- 2) Man teile den Abschnitt KB in 256 Teile, dann ergeben 243 davon den Abschnitt KN des kleinen Halbtons oder des diatonischen Limmas.
- 3) Man teile den Abschnitt NB in neun gleiche Teile, dann begrenzen acht davon den Abschnitt NM des großen Ganztons. Damit ist auch die Aufteilung des Tetrachords synnemenon fertig.

Sind die fünf Tetrachorde derart aufgeteilt, fügt man ihnen die passenden Zahlenwerte auf folgende Weise hinzu. Der Proslambanomenos erhält die Zahl 9.216, was die Teilung der Saite in so viele Teile ausdrückt. Wenn sie halbiert wird, ergibt das 4.608, die man an den Punkt G oder den Ton Mese setzt. Dieser Ton ist vom Proslambanomenos aus der achte und erklingt zur ganzen Saite in der Oktave. Ihr kommt daher das doppelte Zahlenverhältnis zu, nämlich 9.216 : 4.608. Teilt man die halbierte Saite nochmals, so ergibt das 2.304. Diese Zahl schreibt man an den allerletzten Punkt O oder an den Ton der Nete hyperboleon (es stellen nämlich die einzelnen Teilungspunkte des Monochords die einzelnen Töne dar). Diese Zahl steht zu der ersten in im Verhältnis 1 : 4, der Ton erklingt daher in der

Doppeloktave. Weiterhin schreibt man $\frac{2}{3}$ der ersten Zahl 9.216 an den Punkt D, also 6.144, und erhält mit der Hypate meson die Quinte. Fügt man dann $\frac{3}{4}$ der ersten Zahl 9.216 am Punkt E hinzu, also 6.912, erhält man die Quarte im Lichanos hypaton. Schreibt man schließlich $\frac{8}{9}$ der ersten Zahl 9.216, nämlich 8.192, an den Punkt C, erhält man den großen Ganzton oder den Ton Hypate hypaton. Auf diese Art kann man jedem Teilungspunkt die Zahl zuweisen, die er gemäß seines Verhältnisses zur ganzen Saite hat. Doch die beigegefügte Darstellung wird den Betrachter besser informieren, als wenn ich es wortreich erkläre.

Man sieht also, mit welcher Leichtigkeit man die diatonische Einteilung der Tetrachorde auf dem Monochord vornehmen kann.

Wer aber die Einteilung der Tetrachorde auf dem Monochord nach dem Genus quintuplex, dem diatonischen syntonum, dem toniacum, den Genera molle und äquale wünscht, der muss zuerst auf die Proportionen schauen, die bei jeder Teilung zu beachten sind. Wir haben sie im vorigen Buch ausführlich beschrieben. Mit derselben Leichtigkeit, mit der das diatonisch-ditonische eingerichtet wurde, werden sich auch das molle, das toniakische, das syntonische und das äquale Geschlecht in der Einteilung der fünf Tetrachorde auf dem Monochord erweisen.

Der Gebrauch des Monochords

Wenn man einen Saitentrenner oder einen Finger an einen Teilungspunkt legt, erklingen die zum Schwingen gebrachten Saitenteile im Verhältnis zur ganzen Saite in dem musikalischen Intervall, welches der Name angibt, der dort angeschrieben ist. So klingt der schwingende Saitenteil GB zur ganzen Saite AB in der Oktave, CB im Ganzton, EB in der Quarte, DB in der Quinte, OB in der Quindezime und so weiter. Das wird das Experimentieren dem wissbegierigen Leser zeigen.

DIVISIO SIVE Monochordi Chroma		COMPOSITIO Generis tici.	
Tetr. dieze. Tetr. hyper.	2304. Nete hyperboleō	Trihe.	o
	2736. Paranete hyperb.	Semit.	d
	2916. Trita hyperboleō	Semit.	q
	3072. Nete diezeugme.	Semit.	L
	Trihemituono		M
	3648. Paran. diezeugm.	Semit.	C
	3888. Trita diezeugme.	Semit.	N
	4096. Para mese	Semit.	K
	Tuono	Semit.	R
	4608. Mese		G
Tetrach. meson		Trihe.	
	5472. Lychanos meson	Semit.	B
	5832. Parhypate meson	Semit.	I
	6144. Hypate meson		D
Tetrachor. hypaton		Trihe.	
	7296. Lychan. hypaton	Semit.	E
	7776. Parhyp. hypaton	Semit.	F
	8192. Hypate hypaton		C
	9216. Proslambanomena		A
			
		Octava Chromatica in 12 semitonia diuisa querespondet 12 intervalis siue semitonijis ab A vsque in G.	

Kapitel I[X]

Die Teilung des Monochords im chromatischen Tongeschlecht

Was das chromatische Tongeschlecht ist, wurde oben gezeigt. Es wäre deshalb überflüssig, seine Beschreibung hier zu wiederholen. Nur so viel sage ich, dass die Tetrachorde dieses Tongeschlechts über zwei Halbtöne und einen Dreihalbton [trihemitonus] oder eine [pythagoreische] kleine Terz verlaufen. Man kann das chromatische Monochord ganz leicht auf die folgende Weise teilen.

Da auf dem obigen diatonischen Monochord die äußeren Töne der Tetrachorde unveränderlich festgelegt wurden und immer dieselben bleiben, kann man das Monochord dieses Geschlechts sehr leicht einteilen, wenn man die Teilungspunkte E, H und P des vorigen Monochords weglässt. Denn die Strecke DB ist in 16 gleiche Teile geteilt, und an sie werden bis A drei weitere Teile angefügt, damit es 19 sind. Sie ergeben den gesuchten Dreihalbton. Doch wir wollen die Sache mit einem Beispiel erklären.

Weil das Tetrachord dieses Geschlechts aus zwei Halbtönen und einer kleinen Terz besteht, wird das chromatische Monochord in seinen einzelnen Tetrachorden wie folgt bestimmt:

I. Das chromatische Tetrachord hypaton

Weil auf der Saite die äußeren Tönen aller Tetrachorde erhalten bleiben, die der Diatonik und Chromatik gemeinsam sind, wird zunächst die Strecke DB in sechzehn gleiche Teile geteilt, denen noch drei gleiche angefügt werden. Es ergibt sich [E]B, was in neunzehn Teile geteilt ist. [ED] ist nun das Intervall der kleinen Terz, [C]B der gesuchte dritte Ton. Während wir beim vorigen Monochord den kleinen Halbton als erstes Intervall der Tetrachorde angegeben haben, ist es hier das Intervall CF, das mit FE verbunden zwei Halbtöne ergibt. In [E]D haben wir die kleine Terz oder die drei weiteren Halbtöne. Teilt man die Saite DB in sechzehn gleiche Teile und fügt ihnen drei weitere gleiche Teile hinzu, so erklingt CF im ersten Halbton, F[E] im zweiten und [E]D in der kleinen Terz. Das ist das gesuchte chromatische Tetrachord. Das erklärt sich so: Wenn wir von der Proportio sesquiertia oder einer Quarte den kleinen Halbton zwischen CB und FB abziehen, dann bleibt neben dem Dreihalbton ED mit der Proportio supertripartiens 16 [16 : 19] notwendigerweise der Halbton FE mit der Proportio superquintupartiens 76, also 76 : 81.

II. Das chromatische Tetrachord meson

Wenn man das zweite chromatische Tetrachord meson bestimmen will, teilt man GB in sechzehn gleiche Teile und gibt drei weitere in Richtung b hinzu, so dass es neunzehn sind. Indem man bB als dritten Teil hinzunimmt, teilt man das Tetrachord meson chromatisch in die beiden Halbtöne DI und Ib und die gesuchte verminderte Terz bG.

III. Das chromatische Tetrachord diezeugmenon

Man teilt die Strecke LB in sechzehn gleiche Teile, gibt drei weitere hinzu und hat damit die kleine Terz LC. Der auf die zwei Halbtöne CN und Ne folgende Ganzton – oder zwei Halbtöne – eG trennt dann das Tetrachord meson vom Tetrachord diezeugmenon.

IV. Das chromatische Tetrachord hyperboleon

Man teilt OB in sechzehn gleiche Teile, gibt drei weitere hinzu und hat in dO den Dreihalbton. Danach folgen die zwei Halbtöne dQ und QL, die alle zusammen das Tetrachord hyperboleon bilden.

<201>

V. Das chromatische Tetrachord synnemenon

Man teilt MK in sechzehn gleiche Teile und gibt drei weitere hinzu. Dann ist MN die verminderte Terz, es folgen die Halbtöne KR und RG. Fertig ist das Tetrachord synnemenon.

Man sieht, dass man für das chromatische Monochord nichts weiter benötigt, als dass man den diatonischen Tetrachorden einen dritten Ton hinzufügt, wie es bei den Beispielen EB, HB und PB aus den diatonischen Tetrachorden geschehen ist, wobei die übrigen Saitenabschnitte DB, GB und LB unverändert bleiben. Jeder Abschnitt wird in sechzehn gleiche Teile geteilt und jedem werden $\frac{3}{16}$ hinzugefügt. Sie verwandeln nämlich ein diatonisches Monochord in ein chromatisches. Die Bezeichnungen und auch alle Zahlenwerte bleiben dieselben, mit Ausnahme derer, die dem dritten zusätzlichen Saitenabschnitt entsprechen, d. h. der Abschnitte, die mit den Buchstaben a, b, cc, d bezeichnet sind. Wie es sich damit verhält, zeigt deutlich die obige Darstellung.

Kapitel [X]

Die Teilung des Monochords im enharmonischen Tongeschlecht

Da der erste, zweite und vierte Ton – also Hypate hypaton, Parhypate hypaton und Hypate meson –, die auf jedem diatonisch geteilten Tetrachord mit den Buchstaben C, F und D bezeichnet werden, auch bei den enharmonischen Tetrachorden unverändert und für sie wesentlich sind, können wir ohne große Schwierigkeit ein diatonisches in ein enharmonisches Monochord verwandeln, und zwar so: Weil ein enharmonisches Tetrachord aus zwei Diësen und einer großen Terz [Ditonus] besteht – d. h., es verläuft von unten über eine Diësis, eine zweite Diësis und eine große Terz –, brauchen wir nichts weiter, als dass wir den diatonischen Halbton zwischen C[F]³ in f halbieren, woraus zwei Diësen werden. Cf ist die erste Diësis, fC die zweite und FD die große Terz. Was man beim Tetrachord hypaton gemacht hat, das soll man auch bei den anderen machen. So wird der Halbton DI des diatonischen Monochords in Punkt g in zwei Diësen geteilt und ergibt zusammen mit der Terz IG das enharmonische Tetrachord meson. Genauso wird der diatonische Halbton KI in h in zwei Diësen zweigeteilt und ergibt zusammen mit der Terz LM das enharmonische Tetrachord diezeugmenon. LR, das in l in zwei Diësen zweigeteilt wird, ergibt zusammen mit der großen Terz QO das Tetrachord hyperboleon. GR schließlich, in K in zwei Diësen geteilt, ergibt mit der Terz RM das Tetrachord synnemenon, wie es aus der Darstellung deutlich wird.

Corollarium I

1. Man sieht also: Ich verwerfe aus dem diatonischen Tetrachord hypaton das E und aus dem chromatischen das a, halbiere CF und baue so das enharmonische Tetrachord hypaton C f E D.
2. Aus dem diatonischen und dem chromatischen Tetrachord meson verwerfe ich H und b, halbiere DI und lege so das enharmonische Tetrachord [meson] D g I G fest.
3. Aus dem diatonischen und dem chromatischen Tetrachord diezeugmenon verwerfe ich M bzw. C, halbiere KN und baue so das enharmonische Tetrachord diezeugmenon.
4. In dem diatonischen und dem chromatischen Tetrachord hyperboleon verwerfe ich P bzw. d, halbiere L[Q] und baue so das enharmonische Tetrachord hyperboleon L I Q O.
5. Aus dem diatonischen und dem chromatischen Tetrachord synnemenon verwerfe ich H bzw. b, halbiere GR und baue so das enharmonische Tetrachord synnemenon G K R M.

³ F ist die Bezeichnung beim diatonischen Monochord, die im enharmonischen zu E gewandelt wird.

Corollarium II

Es ist offenkundig, dass der zweite Ton der einzelnen diatonischen Tetrachorde zum dritten enharmonischen wird und dass der zweite enharmonische Ton das Intervall zwischen dem ersten und dem zweiten diatonischen Abschnitt in zwei gleiche Teile teilt. Der Grund dafür ist, dass die Differenzen, die zwischen den Proportionen dieser drei Saitenabschnitte bestehen, gleich sind. Sie bewirken, dass sich die Proportionen im Verhältnis zum Ganzton in beständiger arithmetischer Progression verhalten, wie es an der vorigen Darstellung deutlich wird. Zwischen den Proportionen, welche die Formen zweier Diësen ausmachen, findet man dieselbe Analogie, wie auch bei diesen drei Zahlen.

512	Diësis	499	Diësis	486
-----	--------	-----	--------	-----

Zieht man nämlich die mittlere Zahl von der ersten und die dritte von der zweiten ab, so bleibt beide Mal 13. Deshalb ist klar, warum wir den Halbton der diatonischen Tetrachorde halbiert haben, um den enharmonischen Aufbau zu erstellen.

Corollarium III

Es ist nun klar, wie man auf einem einzigen Monochord all das darstellen kann, was bisher über die drei verschiedenen Monochorde gesagt wurde.

Kapitel [X]I

Über ein Saitenteiler-Instrument, mit dem man jede beliebige Linie oder Saite sehr schnell in die dem chromatischen und enharmonischen Tongeschlecht entsprechenden Tonstufen teilen kann

Als Krönung wollen wir hier noch das vorzügliche Instrument vorführen, mit dem das bisher Gesagte gleichsam in nuce zusammengefasst wird. Es wird so konstruiert:

1) Man nehme zwei Leisten AB und CB, die man im Punkt B als ihrem Zentrum gerade so mit Gelenken verbindet, dass ihre äußeren Ränder AB und BC vom Zentrum aus auseinanderstreben und beide Schenkel für jedes Intervall nach dem Wunsch eines Benutzers geöffnet oder geschlossen werden können, wie es bei einem Tonteilungsinstrument geschieht.

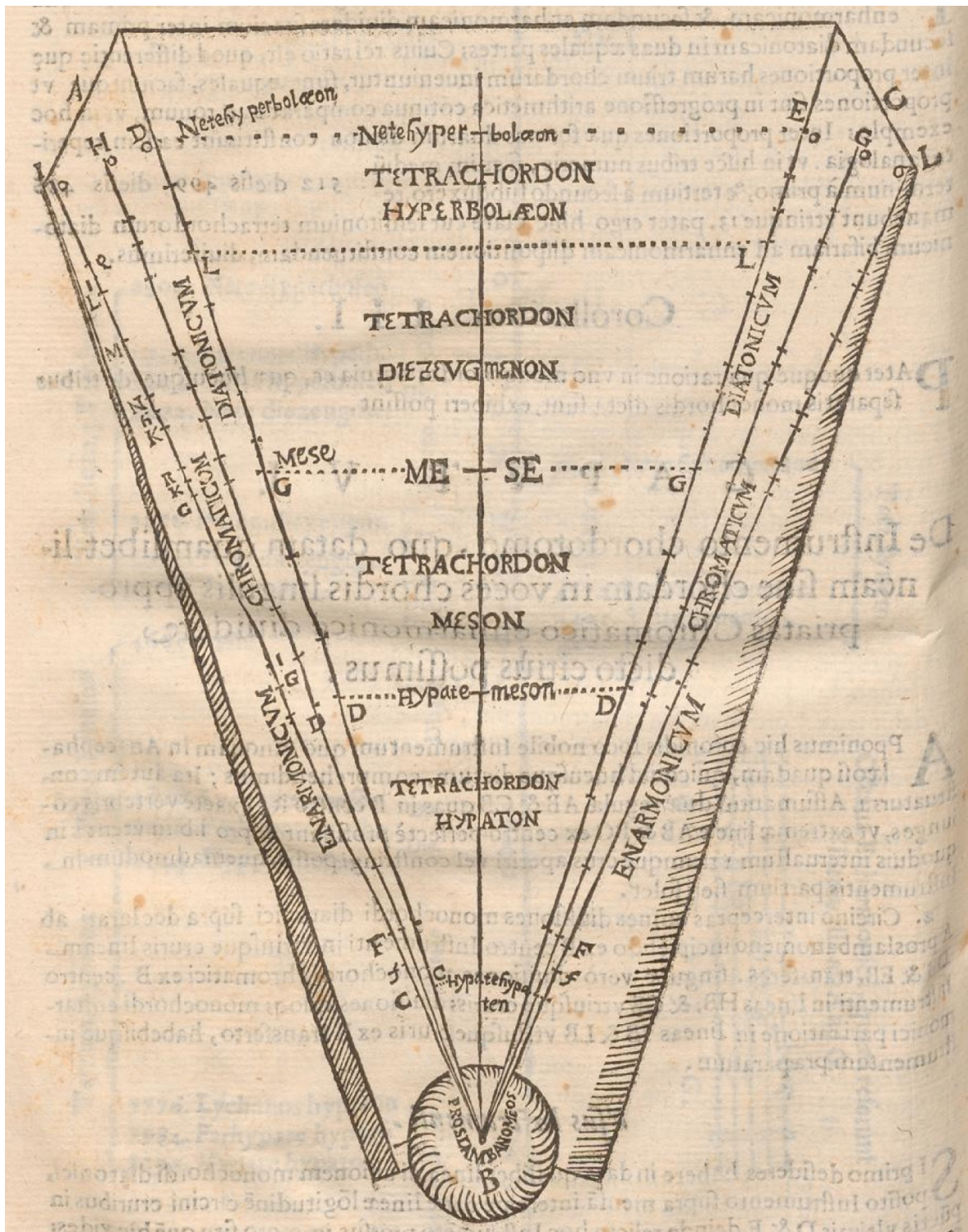
2) Mit einem Zirkel übertrage man alle oben genannten Teilungspunkte eines diatonischen Monochords, angefangen mit dem A des Proslambanomenos vom Zentrum B aus, auf die jeweiligen Linien DB und EB der beiden Schenkel. Die Teilungspunkte des chromatischen Monochords werden auch vom Zentrum B des Instruments auf die Linien HB und GB übertragen und in gleicher Weise die des enharmonischen Monochords auf die Linien IB und LB beider Schenkel. Fertig ist das Instrument.

Gebrauch des Instruments

Wenn man auf irgendeiner gegebenen Strecke zunächst die Einteilung des diatonischen Monochords haben möchte, legt man das Instrument auf den Tisch und trägt an der Länge⁴ der gegebenen Strecke mit den Schenkeln eines Zirkels die äußeren Punkte D und E ab. Danach belässt man das Instrument an diesem Ort, wie man es hier dargestellt sieht. Wenn man die Strecke zwischen den auf beiden Schenkeln notierten Punkten der Töne, die mit denselben Buchstaben gekennzeichnet sind, auf die gegebene Strecke oder die Saite aufträgt, ist die Saite nach dem diatonischen System proportional geteilt. Will man aber nicht die ganze Saite, sondern nur irgendeine Konsonanz auf der gegebenen Strecke festlegen, beispielsweise die Quinte, so überträgt man die mit DD bezeichnete Strecke zwischen den Schenkeln auf die gegebene Saite und hat so die Quinte, die gesuchte Konsonanz, auf der Saite bezeichnet. <204> Genauso verfährt man bei der Bestimmung der übrigen Konsonanzen. Möchte man aber eine Saite nach dem chromatischen Tongeschlecht haben, dann trage man an der Länge der gegebenen Saite oder Strecke mit dem Zirkel die beiden Punkten HG auf beiden Schenkeln ab. Dann verfähre man wie eben bei der Diatonik. Die Länge für die enharmonische Teilung muss an den Punkten I und L an beiden Schenkeln abgetragen werden, damit man die Teilung auf die gegebene Saite übertragen kann (die immer so lang sein muss, wie der Abstand zwischen den beiden Schenkeln). Aber das ist ja viel zu leicht, als dass man es noch ausführlicher erklären müsste.

⁴

Gemeint ist vermutlich: Am Endpunkt der Gesamtlänge, dort, wo »Nete hyperbolaeon« steht



Kapitel [X]II

Die geometrische Teilung jedes Intervalls in zwei oder mehr gleiche Teile

Eine Teilung ist, allgemein gesprochen, entweder rational oder irrational. Letztere existiert für den Musiker nur qua Akzidenz, die erste wird in drei Hinsichten betrachtet: in der arithmetischen, der geometrischen oder der harmonischen. Daher ist eine Konsonanz rational nach arithmetischer Proportion geteilt, wenn deren äußere Töne durch einen mittleren Ton so geteilt werden, dass der größere Teil zwischen dem hohen und der Mitte, der kleinere Teil zwischen dem tiefen und der Mitte zu liegen kommt.⁵ Aber gemäß der harmonischen Analogie muss man die äußeren Töne so teilen, dass, im Gegensatz zur vorigen Teilung, der größere Teil zur Tiefe, der kleinere zur Höhe hin liegt. Auf diese Art wird die Oktave arithmetisch in Quinte und Quarte geteilt, wobei die Quinte oben, die Quarte unten liegt. Bei der harmonischen Teilung aber liegt die Quinte unten, die Quarte oben.

Wird ein Intervall aber nach den Regeln der geometrischen Proportionalität geteilt, bevorzugt es die Gleichheit, d. h. vom Teilungspunkt in der Mitte bis zur Tiefe ist der geteilte Abschnitt genau so groß wie von der Mitte zur Höhe. So geschieht es bei der Teilung der Doppeloktave, die in der Proportio quadrupla steht, welche, geometrisch geteilt, auf beiden Seiten eine Proportio dupla übrig lässt, wie aus dem oben Gesagten deutlich wird. Die drei Teilungsarten unterscheiden sich besonders in der Hinsicht, dass die arithmetische und die harmonische Teilung immer rational sind, die geometrische jedoch rational oder irrational sein kann. Wir wollen jetzt betrachten, wie ein beliebiges gegebenes Intervall auf beide Arten in zwei oder mehrere gleiche Teile geteilt werden kann.

Proposition I

Wie man zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zuordnet

Gegeben seien zwei Strecken AB und CB, die auf einer Geraden liegen. Dann wird über die gesamte Strecke AC der Halbkreis ADC geschlagen. Vom Punkt B wird das Lot BD zum Schnittpunkt von DA und DC auf dem Halbkreis gefällt. Wenn [das Dreieck] ADC rechtwinklig ist – nach Kapitel 31.3 der *Elemente* des Euklid –, dann werden nach Euklid 8.6 die Dreiecke ADB und BDC gleichwinklig. Wiederum nach Euklid 4 werden ihre Schenkel proportional sein, also $AB : BD = BD : BC$. Demnach ist BD die mittlere Proportionale, was

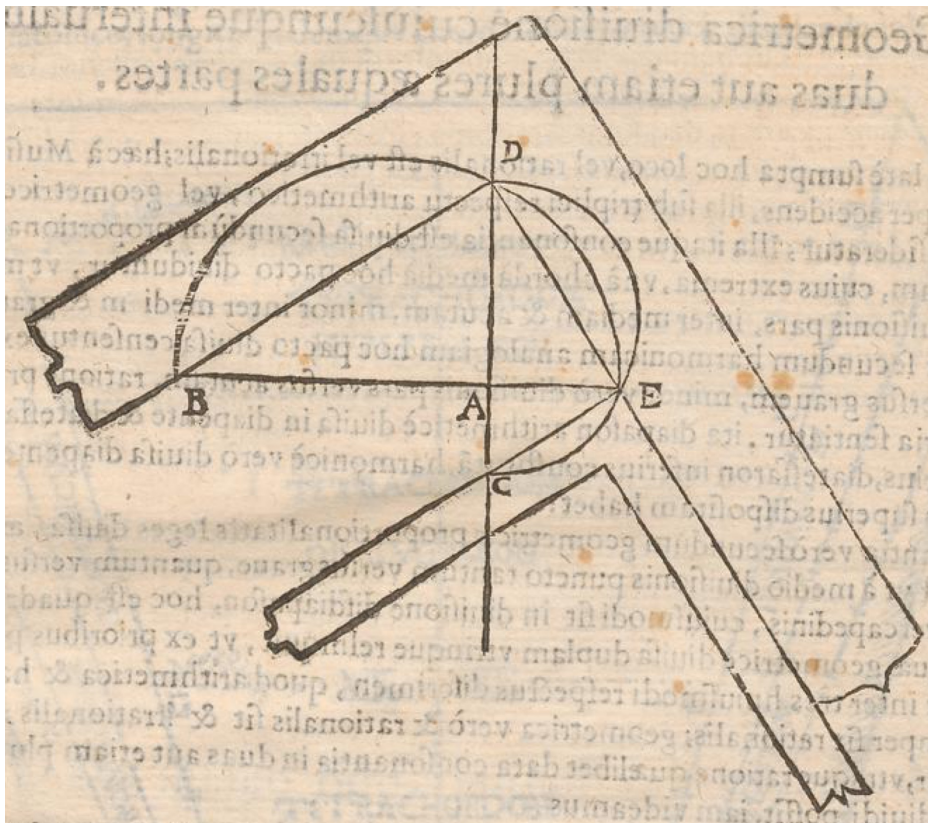
⁵ Zum Beispiel: Wenn ich 3 zwischen 2 und 4 schreibe, ist das kleinere Intervall (Quarte) zwischen dem tiefen Ton 4 und dem mittleren 3, das größere (Quinte) aber zwischen dem höheren 2 und dem mittleren 3.

sich auch mit Zahlen zeigen lässt. AB sei 12, BC 4 Einheiten lang. Miteinander multipliziert ergeben sie 48, deren Wurzel $6 + 12$ ist die Strecke BD.⁶

Proposition II

Wie man zwischen zwei gegebenen Linien zwei mittlere Proportionale findet

Gegeben seien zwei Strecken AB und AC, die einen rechten Winkel bilden. Sie werden am Punkt A zusammengeführt. Der innere Winkel D des Winkelmessers über der Strecke AD wird so nach oben und unten bewegt (dabei ist die Ausrichtung seiner Seite über Punkt B beizubehalten), bis der zweite Winkelmesser, an die Schnittstelle E angelegt, durch den äußeren Punkt C auf der zweiten Geraden AC geht. Nun behaupte ich, dass die beiden Strecken AD und AE die mittleren Proportionalen zu AB und AC sind. Weil nämlich <206> der Winkel BDE ein rechter ist, wird er dies auch im Halbkreis sein, gemäß Euklid 31.3. BA, AD und AE sind gemäß Euklid 8.6 proportional, und ebenso müssen AD, AE und AC proportional sein. Also sind alle vier Strecken zueinander proportional: was zu beweisen war.



⁶

Die Zahlenfolge ist unklar. Eine Deutung: $48 = 6^2 + 12$. Damit wäre klar, dass das Ergebnis mindestens 6 ist (mit »Rest« 12), aber kleiner als 7. – Um die mittlere Proportionale von a und b zu finden muss man die Gleichung $a : c = c : b$ lösen. Das ergibt $c^2 = a \times b$ und somit $c = \sqrt{a \times b}$.

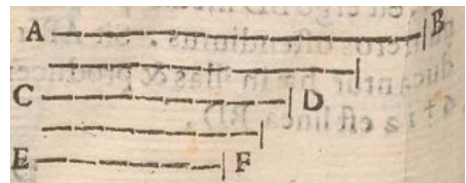
Nimmt man Strecken, die in der Proportio dupla stehen, so ist das Verhältnis kubisch, wenn die kleineren in der Mitte sind, und doppelt kubisch, wenn die kleineren außen sind, siehe Euklid 8.13.

Proposition III

Eine Linie finden, die ein gegebenes Intervall halbiert

Gegeben seien die zwei Strecken AB und EF, die die Oktave darstellen. Zwischen ihnen soll die mittlere Proportionale gefunden werden. Wenn man beide auf einer Geraden vereinigt und dazu wie oben die mittlere Proportionale sucht, dann behaupte ich, dass die mittlere Proportionale diejenige ist, die wir hier mit CD angesetzt haben. Es ist die Strecke, die AB und FE in der Proportio dupla in zwei gleiche Teile und demzufolge auch die Oktave in zwei gleiche Intervalle teilt, denn es besteht dasselbe Verhältnis von CD zu EF wie von AB zu CD.

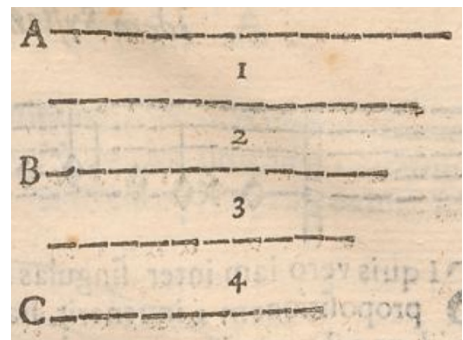
Sollte jemand weitere mittlere Proportionale finden wollen, eine zu AB und CD, eine andere zu CD und EF, dann muss er AB mit CD auf einer Geraden verbinden. Ein Halbkreis, der vom Mittelpunkt der beiden vereinigten Geraden aus geschlagen wird, begrenzt die Strecke, die vom Punkt der Vereinigung beider aus gezogen wird. Das ist dann die mittlere Proportionale, wie es auch vorher gemacht wurde. Genau so findet man auch die mittlere Proportionale zu CD und EF und unzählige weitere, die man zwischen den bereits gefundenen einschieben kann.



Proposition IV

*Wie man die mittleren Proportionalen finden kann,
welche den Ganz- und Halbton halbieren*

Aristoxenos und seine Schüler pflegten (wie man oben gesehen hat) einen Ganzton in zwei gleiche Halbtöne und einen Halbton in zwei gleiche Diësen zu teilen. <207> Das kann auf folgende Weise geschehen. Gegeben seien zwei Saiten A und C in der Proportio sesquioctava [9 : 8], die den Ganzton darstellen. Gesucht ist, wie gesagt, die mittlere Proportionale B. Ich sage, dass die Linie oder der Ton B den Ganzton in zwei gleiche Teile teilt, also in zwei gleiche Halbtöne nach Aristoxenos. A verhält sich zu B wie B zu C. Wegen der Gleichheit der Proportionen erklingen A zu B wie B zu C als gleich große Halbtöne, folglich gilt das Gesagte. Wenn jemand zu AB und BC zwei weitere mittlere



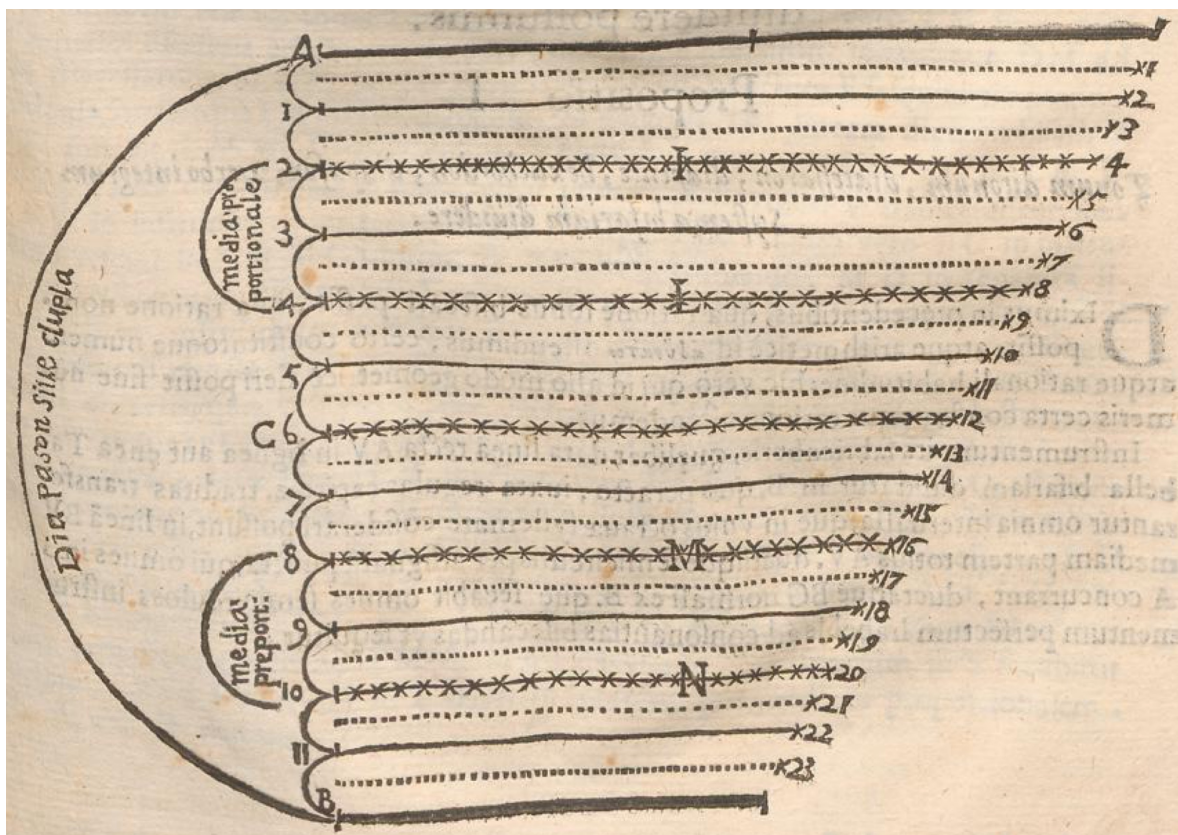
Proportionale hinzufügt, wird er drei mittlere Proportionale haben, die den Ganzton in vier gleiche Diësen teilen.

Proposition V

Wie man die Oktave durch elf mittlere Proportionale in zwölf Halbtöne teilt

Dies kann auf zwei Arten geschehen: erstens geometrisch, zweitens mechanisch. Auf die erste Art muss man so vorgehen: Gegeben seien zwei Saiten A und B in der Proportio dupla. Zu beiden ermittelt man die mittlere Proportionale C. Nach Proposition II sind zu CA die zwei mittleren Proportionalen I und L, zu CB die anderen beiden M und N. Das gegebene Intervall wird somit durch fünf mittlere Proportionalen in sechs gleiche Teile geteilt. Wenn man zu diesen noch weitere mittlere Proportionalen ermittelt, erhält man zwischen den äußeren Saiten AB mittlere proportionale Saiten, durch die das Intervall in zwölf Halbtöne gleichmäßig geteilt wird.

System der elf mittleren proportionalen Saiten, durch die eine Oktave in zwölf gleiche aristoxenische Halbtöne geteilt wird



<208>

Dasselbe System in Noten ausgedrückt



Wenn jemand zwischen je zwei vorgegebenen Linien die mittlere Proportionale nach Proposition II ermittelt, erhält er insgesamt dreiundzwanzig Saiten oder mittlere Proportionalen, die eine Oktave in vierundzwanzig gleiche Teile oder Diësen teilen, wie an der folgenden Darstellung deutlich wird.

System der dreiundzwanzig mittleren Proportionalen, durch die eine Oktave in vierundzwanzig Diësen geteilt wird



Kapitel [X]III

Ein zweiteiliges Instrument, mit dem man schneller
jede beliebige Konsonanz geometrisch
in zwei gleiche Teile teilen kann

Proposition I

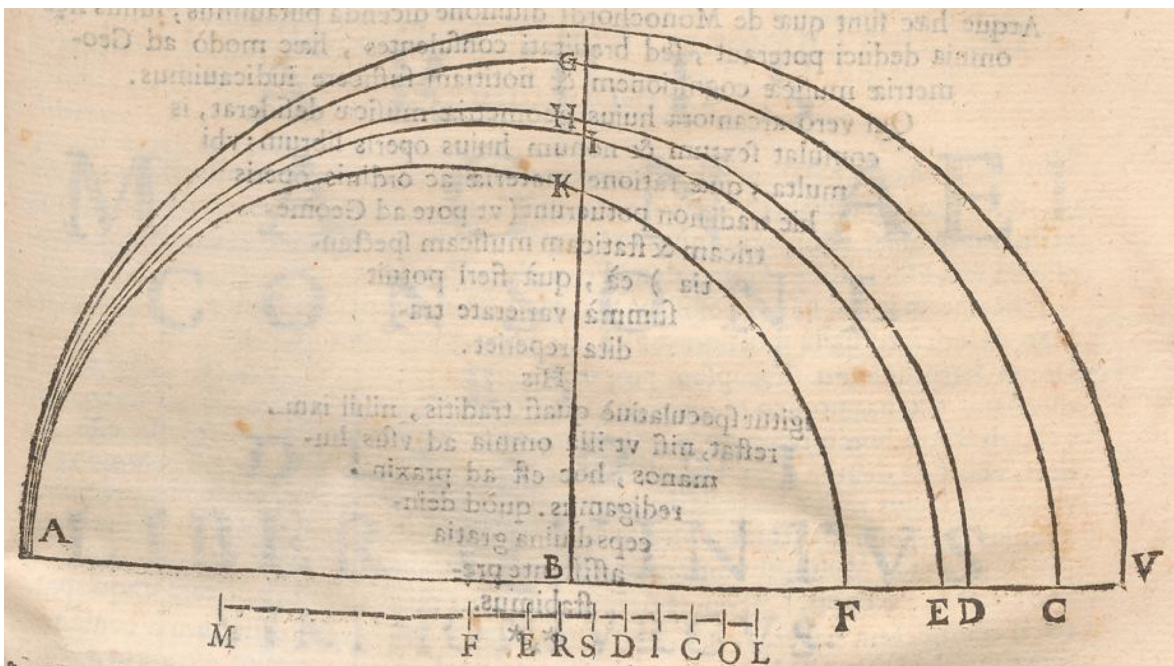
*Einen Ton, eine Terz, Quarte, Quinte, ein Hexachord, eine Oktave,
kurz: ein ganzes System halbieren*

Im Vorausgegangenen haben wir erklärt, wie ein Ton halbiert werden kann und wann das nicht möglich ist. Wir haben gezeigt, dass dies arithmetisch unmöglich ist, wenn er in einer bestimmten, festgesetzten [natürlichen] Zahl besteht und von rationaler Gestalt ist. Jetzt wollen wir zeigen, wie das auf andere Weise geometrisch möglich ist – ohne ein natürliches Zahlenverhältnis.

Das Instrument konstruiert man so: Eine beliebige Strecke AV auf einem Holzbrett oder einer Kupfertafel halbiert man im Punkt B. Danach trägt man gemäß der Vorschriften, die im Kapitel II mitgeteilt wurden, alle Intervalle, die im System einer Oktave vorkommen, auf der Hälfte der Strecke AV ein, also auf der Strecke BV. Nun schlägt man Halbkreise über alle eingetragenen Punkte, die alle in A zusammenlaufen, und fällt mit dem Lineal ein Lot von B nach G, das alle Halbkreise schneidet. Damit hat man das vollkommene Instrument, das alle Konsonanzen halbiert, wie es im Folgenden gezeigt wird.

<209>

Darstellung



Gegeben sei also die Saite LM, auf der wir die richtige Mitte eines ganzen Halbtons und der Konsonanzen Quinte und Quarte finden sollen. Dabei gehe man so vor: Man bestimmt auf der Strecke LM, die nach den in Kapitel II benannten Regeln getrennt aufgelegt wird, den Ganzton LC, was dadurch geschieht, dass man die ganze Strecke in neun gleiche Teile teilt und am achten den Punkt C setzt. LM zu CM erklingt dann als Ganzton. Teilt man nun LM in vier gleiche Teile, muss der dritte Teil mit dem Punkt D die Quarte ergeben: DM zu LM erklingt somit in der Quarte. Teilt man LM in drei gleiche Teile, markiert der Punkt E die Proportio sesquiertia: EM klingt zu LM in der Quinte. Halbiert man schließlich LM im Punkt F, so erklingt LM zu FM in der Oktave. Damit haben wir die Konsonanzen auf LM selbst bestimmt. Diese Punkte werden nun auf die Strecke BV übertragen, so dass BV auf dem Instrument der separaten Strecke LM entspricht. Die Strecke BC auf dem Instrument stellt die Strecke MC des Ganztons dar, BD auf dem Instrument die Strecke MD der Quarte auf der separaten Strecke, BE auf dem Instrument die Quinte ME auf der separaten Strecke und BF auf dem Instrument die Oktave FM auf der separaten Strecke. Wenn man nun durch die so übertragenen Punkte B, F, E, D und C Kreise schlägt und von B aus das Lot fällt, das

die besagten Kreise in den Punkten G, H, I und K schneidet, so ist das Instrument fertig, das jede Konsonanz halbieren kann. Denn wenn man das Lot BG auf die getrennte Strecke LM anlegt, so halbiert es das Intervall des Ganztons LC im Punkt O: Das nämlich ist die mittlere Proportionale auf dem Instrument zu LM und MC. Ebenso halbiert HB, weil sie die mittlere Proportionale zu LM und DM ist, wenn sie auf die Strecke LM angelegt wird, die Strecke LD im Punkt I. Genauso wird IE durch die Strecke Bi, wenn sie auf LM übertragen wird, im Punkt S halbiert. Wie sich LM zu BI verhält, so auch BI zu ME. Da somit BI die mittlere Proportionale zu LM und ME ist, halbiert sie IE in S. So wird auch das Intervall IF durch die mittlere Proportionale BK in R halbiert, und so weiter.

<210>

Corollarium

Daraus kann man erkennen, wie jedermann mit diesem Instrument die Intervalle eines jeden Systems halbieren kann: indem man nämlich die Intervalle eines Systems auf die Strecke BV des Instruments überträgt und dann so verfährt wie oben. Und das ist es, was zur Teilung des Monochords zu sagen war. Man könnte das weiter ausführen, aber, um Kürze bemüht, hielten wir nur dies zur Erkenntnis und Einsicht in die Geometrie der Musik für notwendig. Wer mehr von den Geheimnissen der Musikgeometrie zu hören wünscht, der soll sich an das sechste und neunte Buch dieses Werkes halten. Dort wird er vieles von dem, was aufgrund der Materie und ihrer Ordnung hier nicht mitgeteilt werden konnte (die sich auf die geometrische und statische Musik beziehen), in größter Vielfalt darstellt finden.

Nachdem wir den Gegenstand nun spekulativ betrachtet haben, bleibt uns nur noch, ihn für den Gebrauch durch die Menschen, das heißt für die Praxis einzurichten. Daran wollen wir uns jetzt mit Gottes gnädiger Hilfe machen.