

Athanasius Kircher

Musurgia universalis sive Ars magna consoni et dissoni

Buch III

Übersetzung: Günter Scheibel

Revision: Jacob Langeloh unter Mitarbeit von Frank Böhling

hrsg. von Markus Engelhardt und Christoph Hust

Inhaltsverzeichnis zu Buch III

Die Seitenzahlen beziehen sich auf den lateinischen Text.

	Vorrede	80
	Definitionen zur Musik	81
	Axiome und Postulate zur Musik	81
Kapitel I	Die Proportionen, ihre Definition und Einteilung	82
	Proposition I Wie man mehrfache Proportionen ermittelt	84
	Proposition II Wie man superpartikulare Proportionen findet und multipliziert	84
	Proposition III Wie man superpartiente Proportionen erweitert	85
	Proposition IV Wie man mehrfach superpartikulare Proportionen ermittelt	85
	Proposition V Wie man die mehrfach superpartiente Proportion findet	86
Kapitel II	Die Proportionalitäten	86
	Proposition I Wie man drei Zahlen in musikalischer Proportionalität findet	87
	Proposition II Wie man von zwei beliebigen gegebenen Zahlen die mittlere 88 harmonische Proportionalzahl findet	
	Proposition III Wie man zwei beliebigen Zahlen die dritte harmonische Proportionalzahl zuweist	88
	Proposition IV Wie man zu zwei beliebigen Zahlen die dritte in der harmonischen Folge findet, die kleiner ist als beide	89
	Corollarium	89
Kapitel III	Rechenoperationen mit Proportionen	89
	Proposition I Proportionen miteinander addieren	89
	Proposition II Eine Proportion von der anderen abziehen	90
	Proposition III Proportionen multiplizieren	91
	Proposition IV Proportionen mit Brüchen multiplizieren	92
	Proposition V Proportionen oder Verhältnisse durch Proportionen dividieren	92
	Regel I Proportionen durch Proportionen teilen	92
	Regel II Proportionen durch ganze Zahlen teilen	93
	Regel III Proportionen durch Brüche teilen	93
Kapitel IV	Die irrationalen Zahlen	94
Kapitel V	Die musikalischen Intervalle	95

Kapitel VI	Die kleinen Intervalle	101
	Die Teilung des Ganztons	102
Kapitel VII	Die Herleitung der Intervalle	103
Proposition I	Herausfinden, um wie viel die kleine Terz den großen und den kleinen Ganzton überragt	104
Proposition II	Wenn man wissen will, um wie viel eine kleine Terz einen kleinen Ganzton überragt	104
Proposition III	Den Überstand finden, um den die große die kleine Terz überragt	105
Proposition IV	Den Überstand der Quinte über dem Tritonus finden	105
Proposition V	Den Überstand der Quinte über die verminderte Quinte finden	105
Proposition VI	Nach Subtraktion der kleinen Septime von der großen bleibt als Rest ein kleiner Halbton	106
Proposition VII	Durch Subtraktion der kleinen Terz von der großen verbleibt ein kleiner Halbton	106
Proposition VIII	Durch Subtraktion des großen Ganztons von der kleinen Sexte bleibt die verminderte Quinte übrig	106
Proposition IX	Durch Subtraktion eines großen Halbtons von der Quinte bleibt der Tritonus und durch Subtraktion des Tritonus von der Quinte bleibt der große [Halb-]Ton	106
Proposition X	Durch Subtraktion der großen Terz von der Quarte bleibt der große Halbton	107
Proposition XI	Wie man die Summe der Addition von großem und kleinem Ganzton bildet	107
Proposition XII	Die Quarte setzt sich aus der kleinen Terz und dem kleinen Ganzton zusammen	107
Proposition XIII	Rechnung für die Herleitung der Quarte aus der großen Terz und dem großen Halbton	108
Proposition XIV	Die Quinte wird aus der großen und der kleinen Terz gebildet	108
Proposition XV	Dieselbe Quinte wird aus der Quarte und dem großen Ganzton gebildet	109
Proposition XVI	Die Addition von Quarte und kleiner Terz ergibt das kleine Hexachord oder die kleine Sexte	109
Proposition XVII	Die Addition von verminderter Quinte und dem großen Ganzton ergibt gleichfalls die kleine Sexte	110
Proposition XVIII	Die Addition von Quarte und großer Terz ergibt die große Sexte	110
Proposition XIX	Die Addition von Quinte und kleinem Ganzton ergibt gleichfalls die große Sexte	110
Proposition XX	Die Addition des kleinen Halbtons und der kleinen Sexte ergibt gleichfalls die große Sexte	110
Proposition XXI	Die Zusammensetzung der Septime	111
Proposition XXII	Die Addition der großen Sexte und des großen Halbtons ergibt das kleine Heptachord	111
Proposition XXIII	Die Addition zweier Quarten ergibt gleichfalls das kleine Heptachord	111
Proposition XXIV	Die Addition von Quinte und großer Terz ergibt die große Septime	111
Proposition XXV	Aus der Addition von großer Sexte und dem kleinen Ganzton entsteht die Proportio super ²³ partiens ²⁷	112
Proposition XXVI	Die Zusammensetzung der Oktave: Die Addition von Quinte und Quarte ergibt die Oktave	112

	Proposition XXVII Durch Addition von kleinem Heptachord und großem Ganzton entsteht gleichfalls die Oktave	112
Kapitel VIII	Der Ursprung des [Ton-]Systems und der Tetrachorde	114
Kapitel IX	Der charakteristisch harmonische bzw. in Ziffern ausgedrückte Algorithmus und zunächst etwas über die numerische Anordnung der Töne auf beiden Skalen	120
	Proposition I Wie man die Oktave in Quinte und Quarte teilt	121
	Proposition II Wie man den Ort der Quarte über C <i>sol fa ut</i> auf der Tonleiter findet	121
	Proposition III Wie man den Ort der Quinte unter F 9, dem eben gefundenen Ton, findet	121
	Proposition IV Wie man den Tonbuchstaben D über Γ <i>ut</i> oder, was dasselbe ist, die Quinte über Γ <i>ut</i> auf der Skala findet	122
	Proposition V Wie man die Quarte unter dem eben gefundenen D benennt	122
	Proposition VI Wie man die Quinte über der eben gefundenen Tonstufe A auf der Skala benennt	122
	Proposition VII Wie man die Quarte unter dem eben gefundenen E benennt	122
Kapitel X	Die Folge der Skala der Musica ficta oder, wie man zu sagen pflegt, der Skala mit Akzidentien	126
Kapitel XI	Die Praxis der arithmetischen Musik oder der Algorithmus der Zahlen der Konsonanzen	129
	Proposition I Die Addition	129
	Proposition II Die musikalische Subtraktion	130
	Proposition III Die Multiplikation in der Musik	131
	Proposition IV Die musikalische Division	131
	Proposition V Multiplikation mit Brüchen	131
	Proposition VI Die musikalische Teilung durch Brüche	132
Kapitel XII	Die Teilung des Ganztons	132
	Proposition I Ein Ganzton kann nicht durch eine bestimmte natürliche Zahl in zwei gleiche Teile geteilt werden	132
	Corollarium	133
	Proposition II Wie man einen Ganzton durch irrationale Zahlen in zwei gleiche Teile teilt	133
	Die ἡμίωσις [Halbierung] der musikalischen Intervalle	135
	Beispiel I Die Halbierung eines Kommas	135
	Beispiel II Die Halbierung des Ganztons	136
	Beispiel III Die Halbierung der Oktave	136
	Beispiel IV Die Halbierung der Quarte	137
Kapitel XIII	Drei Arten der Ordnung von Musik und der Tetrachorde	139
	§ I Die fünf Formen des diatonischen Tongeschlechts	139
	§ II Das chromatische Tongeschlecht	141
	§ III Das enharmonische Tongeschlecht	143

Kapitel XIV	Die Arten der Quarte, Quinte und Oktave	146
	§ I Vom Ganzton	146
	§ II Der kleine Halbton	147
	§ III Die Arten der Quarte	147
	§ IV Die Arten der Quinte	148
	§ V Die Arten der Oktave	149
Kapitel XV	Die musikalischen Modi	151
Kapitel XVI	Etymologie, Anzahl und Reihenfolge der Modi	152
Kapitel XVII	Die modernen Modi	154
	Pragmatia I Wie man aus den sieben Formen der Oktave die Modi bestimmt	155
	Pragmatia II Wie man die zwölf Modi durch die zweifache Teilung, die harmonische und die arithmetische, bestimmt	156

Bemerkungen zur Übersetzung:

Die Abbildungen stammen aus dem Exemplar der ETH-Bibliothek Zürich, Signatur: Rar 610. Persistente URL: <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-11653>. Im Wortlaut des Textes weicht dieses Exemplars in Details von dem des Faksimile (hrsg. von Ulf Scharlau im Olms-Verlag) ab.

In eckigen Klammern und grüner Schrift (<1>) ist die Seitenzählung der lateinischen Fassung gegeben. Alle Fußnoten sind editorisch ergänzt.



HOCHSCHULE
FÜR MUSIK UND THEATER
»FELIX MENDELSSOHN
BARTHOLDY«
LEIPZIG

Die Revision der Übersetzung erscheint als Kooperationsprojekt des Deutschen Historischen Instituts Rom – Musikgeschichtliche Abteilung / Istituto Storico Germanico di Roma – Sezione Storia della Musica und des Instituts für Musikwissenschaft der Hochschule für Musik und Theater »Felix Mendelssohn Bartholdy« Leipzig.

Alle Rechte an der Übersetzung sind vorbehalten.

<80>

Drittes Buch der Großen Kunst der Konsonanz und der Dissonanz

Arithmetik Die Lehre von den harmonischen Zahlen

Vorrede

Da uns die Erfahrung lehrt, dass alle Körper, wenn sie harmonisch erschüttert werden, unterschiedliche Töne erzeugen, die [entweder] mal konsonant, mal dissonant oder aus beiden gemischt sind, hielten wir es für richtig, in diesem Buch aufzuzeigen, welche Ursache diese Dissonanzen und Konsonanzen haben. Weil aber das gesamte Wesen dieser Sache in der Natur der sich auf die eine oder andere Art zueinander verhaltenden Zahlen besteht, habe ich beschlossen, zuerst die harmonische Arithmetik voranzustellen: damit wir der Ursache für die Ordnung der Dinge und der gesamten größeren Harmonie ordnungsgemäß und fern jeder Verwirrung, der Mutter der Unordnung [ἀταξίας], weiter nachgehen, und schließlich zu unserem eigentlichen Gegenstand kommen, also unserer Musurgia – was, wie ich hoffe, dann sehr ordentlich vor sich gehen wird, wenn wir zuerst Definitionen, Axiome und Postulate, die sich auf diese Kunst beziehen, methodisch exakt [εὐμεθόδως] vorausschicken, um sodann diese Kunst mit umso größerer Evidenz darlegen zu können.

<81>

Definitionen zur Musik

1. *Einklang* [Unisonus] oder ἰσόφωνος [isóphōnos] ist in der Musik dasselbe, was in der Arithmetik die Monas oder die Einheit ist, in der Geometrie der Punkt, beim Kreis der Mittelpunkt: was sich weder erweitern noch reduzieren lässt.
2. *Intervall* ist das wechselseitige Verhältnis der Strecke eines tiefen und eines hohen Tons oder das διάστημα [diástēma], d. h. die Entfernung eines tiefen Tons von einem hohen.
3. *Harmonische Strecke* [spacium harmonicum]: So nennen wir einen Strang, eine Saite, ein Holz, ein Rohr oder die ausgeatmete Luft und alles andere, dem wir einen Ton entlocken können, der im Vergleich zu einem anderen ähnlichen Körper gespannter oder entspannter ist.

4. Das *mehrfache Intervall* [intervallum multiplex] ist dann gegeben, wenn die größere Tonstrecke die kleinere mehrfach enthält. Dergleichen sind die doppelten, dreifachen, vierfachen etc. Intervalle.
5. Ein *harmonischer Teil* [pars harmonica] ist der, der als Vielfaches das Ganze misst.
6. Ein *überteiliges Intervall* [intervallum superpartiens] ist dann gegeben, wenn die größere Strecke die kleinere enthält und dazu noch *mehrere* Teile der kleineren.
7. Ein *einzelne überteiliges Intervall* [intervallum superparticulare] ist gegeben, wenn eine größere Strecke eine kleinere enthält und zusätzlich *einen* bestimmten Teil von ihr.
8. Ein *hoher Ton* [sonus acutus] ist die häufige und schnelle Schwingung von zusammengepresster Luft nach der Kollision von Körpern.
9. Ein *tiefer Ton* [sonus gravis] ist die langsame und geringe Schwingung von lockerer Luft nach der Kollision von Körpern.
10. *Phthongus* ist die Stimmlage des Melodischen [ἐμμελής], das heißt ein Ton, der von der Stimme in einer bestimmten Tonlage gehalten werden kann.
11. *Konsonanz* ist die Mischung eines tiefen mit einem hohen Ton, die den Ohren süß und einheitlich vorkommt.
12. *Dissonanz* ist der zu den Ohren gelangende Aufprall zweier sich schwer mischender Töne, der rau und unangenehm ist.

Axiome und Postulate zur Musik

1. Was auch immer etwas anderes messen kann, das misst auch das von diesem Gemessene.
2. Was harmonisch zusammengesetzt ist, kann auch wieder in die Einzelteile zerlegt werden, aus denen es zusammengesetzt ist.
3. Der Teil jeder Zahl ist die nach ihr benannte Einheit.¹
4. Wenn man irgendeine Zahl mit Eins multipliziert, bringt man diese hervor.²
5. Was immer misst, indem Eins-mit-Rest abgezogen wird, misst auch das Ganze.
6. Was ein und demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich.

¹ Zum Beispiel 1 von 5 = ein Fünftel.

² Kircher zeigt damit an, dass die Einheit die Zahlen erst generiert. Pico della Mirandola schrieb diese Vorstellung Pseudo-Dionysios Areopagita zu: »Unum enim«, inquit Dionysius, »dicitur Deus quia unice et omnia.« Rursus: »unum dicitur quia ita principium omnium est quae sunt, sicut omnium numerorum principium unitas est« (De ente et uno, hrsg. von Paul Richard Blum u. a., Hamburg 2006, S. 18; die Herausgeber weisen Nom. divin. I, 7 und V, 6 als Quelle nach). In der spezifischen Formulierung hat der Satz seinen Ursprung vermutlich in den lateinischen Euklid-Übersetzungen (Hubert L. L. Busard, *Campanus of Novara and Euclid's Elements*, Bd. 1, Stuttgart 2005 (Boethius 51), S. 231), später scheint er bei Johannes de Muris auf (De arte mesurandi, hrsg. von Hubert L. L. Busard, Stuttgart 1998 (Boethius 41), S. 100).

7. Was etwas anderes um das Doppelte überragt, das muss mehr als die Hälfte größer sein als jenes.
8. Wenn zwei Ganze einander gleich sind, so sind auch ihre Hälften gleich.
9. Was verdoppelt das Ganze nicht ausfüllt, das ist weniger als halb so groß.
10. Das Ganze ist immer größer als sein Teil.
11. Wenn zwei Saiten einander gleich sind, dann entspricht die Proportion von Strecke zu Strecke auch der von Ton zu Ton.
12. Zwischen harmonischen Zahlen, die nur um eine Einheit [unitas] auseinander liegen, gibt es keine Mitte.
13. Man kann jede beliebige Strecke in beliebig viele gleiche Teile teilen.
14. Das harmonische Ganze [totum [spacium] harmonicum] gibt im Verhältnis zu einem seiner Teile einen tieferen Ton von sich, genau wie eine weniger gespannte gegenüber einer straff gespannten Saite.
15. Jede Proportion ist das Verhältnis einer Zahl zu einer anderen.
16. Der Teil gibt im Vergleich zum Ganzen einen höheren Ton von sich.
17. Durch Vermehrung der Bewegung strebt ein Ton aus der Tiefe nach oben, durch Verringerung der Bewegung von oben nach unten.
18. Im gleichen Material, verhält sich ein Ton zum anderen wie eine Größe zur anderen.
19. Ein hoher Ton besteht aus zahlreicheren Bewegungen als ein tiefer.
20. Ein Ganzton kann nicht harmonisch in zwei gleiche Halbtöne geteilt werden.

<82>

Kapitel I

Die Proportionen, ihre Definition und Einteilung

Was ist ein Verhältnis?

Um das Wesen und die Natur der Musik genauer zu erkennen, fordert die Ordnung offensichtlich, an erster Stelle etwas über den Logos [λόγος], auf Latein »ratio«, und die Analogie der Zahlen zu sagen. »Ratio« definiert Euklid im V. Buch seiner Definitionen [Elemente] so: »Ratio (oder was dasselbe ist: Proportio) ist das Verhältnis zweier beliebiger Größen von derselben Art zueinander.« Wir wollen aber, wobei wir aus Platzgründen zahlreiche Unterteilungen von Größen auslassen, nur über die Rationes von Zahlen sprechen und definieren die Ratio wie folgt: *Ratio ist ein bestimmtes Verhältnis zweier Zahlen zueinander, oder ihre Vergleichung.* Das heißt: Jede beliebige Zahl kann mit einer anderen verglichen werden und zeigt sich zu ihr als gleich oder ungleich. Wenn sie gleich ist wie 4 zu 4, heißt die Ratio »gleich« [ratio aequalitatis], was wir vernachlässigen, da es für die Musik ungeeignet ist. Wenn eine Zahl der anderen gegenüber ungleich ist, heißt auch die Ratio »ungleich«. Innerhalb dieser Gattung der Verhältnisse findet man zwei Arten, nämlich das Verhältnis [ratio; ab hier dt. Terminologie] der größeren [ratio maioris

inaequalitatis] und das der kleineren Ungleichheit [ratio minoris inaequalitatis]. Beide wollen wir hier erklären.

Eine Zahl, die mit einer anderen verglichen wird, nennt man »Vorgänger« [antecedens], die zweite, mit der der Vergleich gemacht wird, »Nachfolger« [consequens]. Wenn also der Vorgänger größer ist, spricht man von einem Verhältnis oder einem Vergleich von größerer Ungleichheit, wie zum Beispiel bei 6 zu 3. Ist der Vorgänger jedoch kleiner als der Nachfolger, hat man ein Verhältnis von kleinerer Ungleichheit, wie zum Beispiel bei 3 zu 6. Der Bezeichnung dieses Verhältnisses wird dann das Präfix »sub« vorangestellt, so dass die zwei Verhältnisse von größerer und kleinerer Ungleichheit so ausgedrückt werden: 6 zu 3 ist doppelt [dupla], 3 zu 6 ist »subdoppelt« [subdupla]. Weiterhin gibt es fünf Erscheinungsformen des Verhältnisses von größerer Ungleichheit:

drei einfache	1) vielfach
	2) superpartikular
	3) superpartient
	4) mehrfach superpartikular
zwei aus den oberen zusammengesetzte	5) mehrfach superpartient

Was ist ein vielfaches Verhältnis?

Mehrfach [multiplex] ist ein Verhältnis dann, wenn der Vorgänger den Nachfolger mehrmals oder jedenfalls mehr als einmal *exakt* enthält, das heißt, wenn der Vorgänger vom Nachfolger so abgezogen wird oder so von ihm geteilt wird, dass kein Rest bleibt. So ist das Verhältnis von 4 zu 2 doppelt, das von 9 zu 3 dreifach usw. Denn die Erscheinungsformen eines so definierten Verhältnisses können bis ins Unendliche aufgezählt werden. Das kleinste von allen ist das doppelte Verhältnis. Das größte kann nicht genannt werden, da kein Verhältnis so groß sein kann, dass nicht ein noch größeres angegeben werden könnte, was in der Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 deutlich wird, in der die Zwei die Verdopplung der eins, die Drei die Verdreifachung, die Vier die Vervierfachung der Eins ist – bis ins Unendliche.

Was ist ein superpartikulares Verhältnis?

Ein superpartikulares Verhältnis [ratio superparticularis] ist dann gegeben, wenn der Vorgänger nur eine Einheit größer ist als der Nachfolger. So hat man bei 3 zu 2 die Ratio sesquialtera [eineinhalbfach], da die Drei die Zwei ein und ein halbes Mal enthält. Gleichermäßen ergibt 4 zu 3 die Ratio sesquitertia [eineindrittel], denn die Vier enthält die Drei einmal und dazu noch ihren dritten Teil. Die größten dieser Verhältnisse sind das eineinhalbfache und das eineindrittelfache, die kleinsten, die man natürlich bis ins Unendliche teilen kann, können mit Worten so wenig ausgedrückt wie mit dem Geist erfasst werden. Das eineinhalbfache oder das eineindrittelfache [superpartikulare] ist das Gegenteil zum doppelten [vielfachen] Verhältnis: Dieses kann vom kleinsten bis ins Unendliche anwachsen, jenes vom größten bis ins Unendliche schrumpfen.

Ein superpartientes Verhältnis [Ratio superpartiens] liegt vor, wenn der Vorgänger den Nachfolger einmal und dazu noch mehrere weitere Teile von ihm in sich enthält.³ So ist 5 zu 3 die Ratio superbipartiens der Drei, die man erhält, wenn man die größere Zahl durch die kleinere teilt. Denn die Drei ist in der Fünf einmal <83> enthalten und es bleibt $1\frac{2}{3}$, die Zahl der Ratio superbipartiens von Drei. Davon gibt es natürlich unendlich viele Formen. Wenn nämlich eine Proportion die größere Zahl einmal enthält und dazu zwei dritte Teile, spricht man von einer Proportio superbipartiens der Drei, wenn sie zwei vierte Teile enthält oder auch fünfte, sechste, siebte oder achte Teile, heißt sie Proportio superbipartiens der Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht usw. Wenn wiederum die größere Zahl die kleinere einmal enthält und dazu noch drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht oder neun Teile von sich, spricht man von einer Proportio supertripartiens, superquadr[u]partiens, superquintupartiens, supersextupartiens, sieben, acht, neun, etc. bis ins Unendliche, wie man hier am Beispiel sieht:

I. Darstellung mehrfacher Proportionen

doppelte					dreifache					vierfache				
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	3	6	9	12	15	4	8	12	16	20

II. Darstellung superpartienter Verhältnisse

3 : 5 – Proportio superbipartiens von Drei.

4 : 7 – Proportio supertripartiens von Vier.

5 : 9 – Proportio superquadrupartiens von Fünf.

6 : 11 – Proportio superquintupartiens von Sechs.

7 : 13 – Proportio supersextupartiens von Sieben.

8 : 15 – Proportio superseptupartiens von Acht.

9 : 17 – Proportio superoctupartiens von Neun.

III. Darstellung superpartikularer Verhältnisse

Sesquialteri (11/2-fache)						Sesquitertii (11/3-fache)						Sesquiquarti [1¼-fache]					
3	6	9	12	15	18	4	8	12	16	20	24	5	10	15	20	25	30
2	4	6	8	10	12	3	6	9	12	15	18	4	8	12	16	20	24

Eine mehrfach superpartikulare Proportion [Proportio multiplex superparticularis] ist dann gegeben, wenn eine größere Zahl eine kleinere mehrfach enthält und dazu noch einen Teil von ihr. So bei 9 zu 4: Die Neun enthält die Vier zweimal und dazu noch einen Viert-Teil [unam quartam] der kleineren Zahl oder ein Viertel [quaternarium]. Diese Proportion setzt sich zusammen aus der mehrfachen und der superpartikularen Proportion. Sie hat

³ $(n+a)/n$; $a > 1$.

unendliche viele Formen, sowohl von ihrer mehrfachen Seite, wie auch von ihrer superpartikularen her. Ein Beispiel folgt:

I. Darstellung mehrfach superpartikularer Verhältnisse:

	2	3	4	5	6	7
doppelt	5	7	9	11	13	15
dreifach	7	10	13	16	19	22
vierfach	9	13	17	21	25	29
fünffach	11	16	21	26	31	36
sechsfach	13	19	25	31	37	43
	sesquialteri	sesquiertii	sesquiquarti	sesquiquinti	[sesquisexti]	sesquiseptimi

Dieses Beispiel muss so verstanden werden: Oben in jeder Spalte steht eine Zahl. Die darunter stehenden erhalten ihre mehrfache Benennung aus den Angaben in der linken senkrechten Spalte, die superpartikulare Benennung aber von der Angabe unten, die in der entsprechenden Spalte aufgeschrieben ist. Zum Beispiel ist das Verhältnis in der ersten Spalte 2 zu 5, das ist die Proportio dupla sesquialtera, aber das Verhältnis 2 zu 7 ist die Proportio tripla sesquialtera. Das Verhältnis 2 zu 9 ist die Proportio quadrupla sesquialtera. Genauso verhält es sich mit der zweiten Spalte: 3 zu 7, das ist die Proportia dupla sesquiertia, das Verhältnis 3 zu 10 ist die Proportio tripla sequiertia.

II. Darstellung mehrfach superpartienter Proportionen

superbipartiens doppelt 3 2+(2/3*n)	3	6	9	12
	8	16	24	32
supertripartiens doppelt 4 2+(3/4*n)	4	8	12	16
	11	22	33	44
superquadripartiens doppelt 5 2+(4/5*n)	5	10	15	20
	14	28	42	56
superbipartiens dreifach 3 3+(2/3*n)	3	6	9	12
	11	22	33	44
supertripartiens dreifach 4 (3+3/4*n)	4	8	12	16
	15	[30]	45	60

<84> Die mehrfach superpartiente Proportion liegt vor, wenn eine Zahl im Vergleich zu einer anderen diese andere mehr als einmal enthält und zusätzlich mehrere Teile von ihr. Auch das kann bis ins Unendliche gehen. Wenn nämlich eine Zahl eine andere mehr als einmal enthält, also zum Beispiel zweimal, und dazu noch zwei Drittelteile, spricht man von einer Proportio dupla superbipartiens tertias [8 : 3], wie in Dastellung II deutlich wird. Aus diesen Beispielen wird, wenn mich nicht alles täuscht, zu Genüge die Entstehung jedweder Proportion deutlich. Doch damit nicht noch mehr Schwierigkeiten für Anfänger bestehen

bleiben, wollen wir hier die Entstehung einzelner Proportionen durch Beispiele besonders darstellen.

Proposition I

Wie man mehrfache Proportionen ermittelt

Man suche zuerst die kleinsten Terme der Proportion, multipliziere jeden dann mit 2 und erhält so die zweite Folge der Proportion. Multipliziert man sie mit 3, erhält man die dritte, multipliziert man mit 4, die vierte Folge, und so weiter bis ins Unendliche. So möchte man etwa 1 : 2, die Proportio subdupla, erweitern. Man multipliziert also mit Zwei und erhält 2 : 4 als zweiten Terminus der Proportio dupla. Multipliziert man sie mit 3, so erhält man den dritten Terminus der Proportio dupla, nämlich 3 : 6, und so geht es bis ins Unendliche weiter. Wenn aber die ersten Zahlen und die minimale Ausgangsbasis der Reihe sich in dreifacher Proportion zueinander verhalten wie 3 : 1, so erhält man, indem man die einzelnen Terme immer mit 3 multipliziert, die übrigen dreifachen Proportionen der Reihe nach bis unendlich. Gleiches gilt für alle bis ins Unendliche ausdehnbaren mehrfachen Proportionen.

doppelt						dreifach					vierfach				fünffach				
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	4	8	12	16	5	10	15	20	25
2	4	6	8	10	12	3	6	9	12	15	1	2	3	4	1	2	3	4	5

Proposition II

Wie man superpartikulare Proportionen findet und multipliziert

Man nimmt eine Zahl, die ein Teil der Proportionsbezeichnung ist, nimmt als zweite die unmittelbar größere Zahl – sie ist natürlich um eins größer als die erste – und hat damit schon die erste superpartikulare Proportion, so dass sie in kleineren Zahlen nicht mehr ausgedrückt werden kann [also vollständig gekürzt ist]. Wenn diese Zahlen verdoppelt oder mit einer anderen Proportion multipliziert werden, ergeben sich notwendig Zahlen von derselben Proportion. Unser Beispiel soll die vorgegebene Proportio superparticularis sesquiertia sein, die multipliziert und bis unendlich vergrößert werden soll. Die erste Zahl dieser Proportion heißt 3, die unmittelbar folgende ist 4 und damit die gesuchte größere Zahl der Proportio sesquiertia (3 : 4), die mit kleineren Zahlen nicht ausgedrückt werden kann. Multipliziert man dieses Verhältnis mit zwei, erhält man die zweite Proportion der Reihe, mit drei multipliziert ergibt sich die dritte, mit vier die vierte etc. bis unendlich. Genauso stellt man die Folge sesquiquarta, sesquiquinta, sesquisexta und unendlich weitere auf.

sesquialtera						sesquitertia						Sesquiquarta					
I	II	III	IV	V	VI	I	II	III	IV	V	VI	I	II	III	IV	V	VI
3	6	9	12	15	18	4	8	12	16	20	24	5	10	15	20	25	30
2	4	6	8	10	12	3	6	9	12	15	18	4	8	12	16	20	24

<85>

Proposition III

Wie man superpartiente Proportionen erweitert

Gegeben sei eine Zahl mit einem Nenner, der um die angegebene Anzahl von Einheiten größer als die Zahl ist, welche im Namen [Zähler] der Proportion angegeben wird. Damit hat man die erste superpartiente Proportion einer bestimmten Form, welche die Zahl der Bestandteile [Zähler und Nenner] angibt. Wenn man diese beiden Zahlen verdoppelt, verdreifacht oder mit einer beliebigen anderen Zahl multipliziert, erhält man die zweite, dritte usw. Proportion der Reihe. Wenn man zum Beispiel die Proportio superbipartiens von Drei erweitern will, dann haben wir bei der vorgegebenen Proportion zunächst das »Zwei«, in der Bezeichnung »bi«, dann die Drei angegeben (»von Drei«). Der 3 also fügen wir die 2 hinzu und erhalten 5. Die gesuchte Proportio superbipartiens tertias muss also 5 : 3 sein, was nicht mehr mit kleineren Zahlen ausgedrückt werden kann. Verdoppelt man sie, erhält man die zweite Proportion dieser Reihe, verdreifacht man sie, die dritte und so weiter, wie folgt:

superbipartiens tertia						supertripartiens quarta						superquadrupartiens quinta					
5	10	15	20	25	30	7	14	21	28	35	42	9	18	27	36	45	54
3	6	9	12	15	18	4	8	12	16	20	24	5	10	15	20	25	30

Proposition IV

Wie man mehrfach superpartikulare Proportionen ermittelt

Wenn man den Wert des Bruchteils [d[en]ominator partis aliquotae, den Nenner] mit dem in der mehrfachen Proportion genannten Faktor [denominator multiplicis] multipliziert und dem Ergebnis eine Einheit hinzufügt, erhält man die erste Proportion der hier vorgestellten Art. Möchte man zum Beispiel alle Zahlen der Proportio sextupla sesquinona finden, so multipliziert man den Wert 9, die Angabe des Neun-Bruchteils, mit dem Wert 6, der Angabe des Vielfachen der Proportion, und erhält das Ergebnis 54. Dazu addiert man 1, und die so ermittelte Zahl 55 ergibt im Verhältnis zur 9 (der Angabe des Neun-Teils) die erste Proportionszahl der Proportio sextupla sesquinona, die mit kleineren Zahlen nicht ausgedrückt werden kann. Verdoppelt man sie, so ergibt sich mit 110 : 18 die zweite Gestalt der hier vorgestellten Proportion, und wenn man sie ad infinitum multipliziert, ergibt sich stets eine Proportion dieser Art. Will man die Proportio dupla sesquialtera haben, nimmt man die 2, was die Proportio sesquialtera nahelegt, multipliziert sie mit 2, wie es ja der Name des

Vielfachen vorschreibt und erhält, wenn man noch eine Einheit hinzufügt, die Fünf. 5 : 2 ist also die erste Proportionszahl dieser Art, die nicht mit kleineren Zahlen ausgedrückt werden kann. Verdoppelt man sie, erhält man mit 10 : 4 die zweite Proportionszahl, und wenn man diese minimalen Ausdrücke mit beliebigen Zahlen multipliziert, entstehen immer Proportionen dieser Art.

Proportiones duplae sesquialterae:											
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24

Proportiones triplae sesquiseptimae :									
22	44	66	88	110	132	154	176	198	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	

<86>

Proposition V

Wie man die mehrfach superpartiente Proportion findet

Man multipliziert die Zahlenangabe irgendeines Teilers mit der Zahlenangabe des angegeben Vielfachen der Proportion [multiplex propositae proportionis]. Wenn man das Produkt errechnet hat, addiert man die Anzahl der Teile gemäß der Angabe der [hinzuzufügenden] gleichen Teile und erhält so die erste Proportion, nach der man gesucht hat. Sucht man zum Beispiel die Proportio quadruplae superoctupartiens undecimas [52 : 11], so nimmt man die Angabe des Elfer-Teilers, also 11, multipliziert mit 4, der Angabe der vierfachen Proportion [quadrupla], erhält das Produkt 44 und addiert dazu 8, wie es »und acht Teile darüber hinaus« [superoctupartiens] besagt. Die so ermittelte Zahl 52 in Bezug zu 11, dem Teiler, ist die erste gesuchte Proportion. 52 : 11 ergibt verdoppelt 104 : 22, damit hat man die zweite Zahl: und so geht es weiter bis ins Unendliche, wie die Beispielen zeigen.

Darstellung I

Proportiones quadruplae superoctupartientes undecimas.

52	104	156	208	250	312
11	22	33	44	55	66

Darstellung II

Proportiones duplae superbipartientes tertias.⁴

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39

Kapitel II

Die Proportionalitäten

Die Analogien oder die Proportionalitäten, wie sie von Euklid definiert werden, werden in mehrere Arten unterteilt, deren drei wichtigste diejenigen sind, welche die Arithmetiker »Reihen« [medietates] nennen, nämlich arithmetische, geometrische und harmonische. Wenngleich wir hauptsächlich die dritte und letzte Proportionalität behandeln müssen, glauben wir dennoch etwas über alle sagen zu sollen, damit der Unterschied erkannt wird, durch den sie sich von den vorausgehenden unterscheidet.

Was ist die arithmetische Proportionalität?

Die **arithmetische** Analogie, Proportionalität oder Reihe ist gegeben, wenn drei oder mehr Zahlen mit derselben Differenz fortschreiten, wie zum Beispiel die Zahlen 4, 7, 10, 13, 16. Weil [in diesem Fall] also jede von ihnen gegenüber der vorangehenden Zahl um drei größer ist, sagt man, sie bilden eine arithmetische Proportionalität. Von ihr gibt es wieder zwei Arten: die verbundene [continua] und die unverbundene [discreta]. Verbunden heißt sie, wenn es in der Reihe der Zahlen keine Unterbrechung gibt, sondern wenn jede an die vorangehende anschließt, wie im eben gegebenen Beispiel. Unverbunden heißt sie, wenn die Zahlenreihe unterbrochen wird und immer nur zwei Zahlen aneinander anschließen (statt jede der vorausgegangenen), wie zum Beispiel bei den Zahlen 4, 7, 8, 11, 30, 33. <87> Hier ist die Differenz immer nur zwischen zwei Zahlen dieselbe, also zwischen 4 und 7, dann zwischen 8 und 11, wieder zwischen 30 und 33, nicht aber zwischen 4 und 7 sowie 7 und 8.

[Was ist die geometrische Proportion?]

Die **geometrische** Proportionalität oder Reihe ist dann gegeben, wenn drei oder mehr Zahlen zueinander das gleiche Verhältnis haben. Diese wird im eigentlichen Sinne Proportionalität oder Analogie genannt, die eben erwähnte [arithmetische] aber nur uneigentlich, weil das Verhältnis zwischen den Zahlenwerten nicht immer gleich ist. So heißt sie [die geometrische Proportionalität] zu Recht die Mitte wegen der mittleren Zahlen, die mit einem bestimmten Wert zwischen zwei äußere Zahlen eingeschoben

⁴ $8 : 3; 2 \times 3 = 6 + 1 \times 2 = 8; 16 : 6; 2 \times 6 = 12 + 2 \times 2 = 16$

werden, wie zum Beispiel die Zahlen 2, 4, 8, 16, da jede von ihnen die Verdopplung der vorhergehenden Zahl ist und sie somit die geometrische Proportion bilden. Auch hier gibt es wieder zwei Arten, die verbundene und die unverbundene. Als verbundene wird die angesehen, bei der die Zahlen aneinandergereiht sind; als unverbundene zum Beispiel diese sechs Zahlen: 2, 4; 12, 24; 30, 60: denn nur immer zwei Zahlen stehen im doppelten Verhältnis zueinander und nicht jede in Bezug auf die direkt vorausgehende.

Was ist eine musikalische Proportion?

Eine **musikalische** oder harmonische Proportionalität oder eine musikalische Mitte liegt vor, wenn drei Zahlen so angeordnet sind, dass das Verhältnis der größten zur kleinsten Zahl dasselbe ist wie das von der Differenz der zwei größeren zur Differenz der zwei kleineren. So zum Beispiel bei den Zahlen 3, 4, 6, weil das Verhältnis zwischen der größten Zahl 6 zur kleinsten 3 dasselbe ist wie das Verhältnis der Differenz der größten (6) und mittleren Zahl (4) – nämlich 2 – zur Differenz der mittleren (4) und kleinsten Zahl (3), gleich 1. Weil bei beiden das Verhältnis doppelt ist, bilden sie eine musikalische bzw. harmonische Proportionalität oder musikalische Mitte. Dass es sich hierbei um die harmonische Proportionalität handelt, wird daraus klar, dass sie die drei Hauptkonsonanzen, die Oktave, die Quinte und die Quarte, beschreibt. Wie im Beispiel $6 : 3$ die Oktave bedeutet, $6 : 4$ die Quinte und schließlich $4 : 3$ die Quarte, so muss man es auch mit den übrigen Konsonanzen halten. Doch jetzt wollen wir zu den Einzelheiten der musikalischen Proportionalität weitergehen.

Proposition I

Wie man drei Zahlen in musikalischer Proportionalität findet

Man gewinnt drei harmonische Zahlen aus irgendwelchen drei in arithmetischer Proportion stehenden Zahlen auf folgende Art: Man multipliziert die erste Zahl mit der zweiten und mit der dritten, die zweite sodann mit der dritten und erhält das Gesuchte, wie folgt:

Es seien 1, 2, 3 die drei Zahlen einer arithmetischen Reihe, und daraus will man drei harmonische proportionale Zahlen machen. Also multipliziert man 1 erst mit 2, dann mit 3 und erhält die erste und die zweite Zahl 2 und 3. Wenn man nun die arithmetische Zahl 2 mit der dritten multipliziert – 2×3 –, so kommt 6 heraus, die dritte Zahl von harmonischer Proportionalität, also wie folgt: 1, 2, 3: arithmetisch – 2, 3, 6: harmonisch.

Mit anderen Worten: Man multipliziert die mittlere Zahl der arithmetischen Reihe mit den äußeren Zahlen und erhält so die äußeren harmonischen Zahlen. Die äußeren arithmetischen Zahlen ergeben, miteinander multipliziert, die mittlere harmonische Zahl, wie das folgende Beispiel zeigt:

1	2	3	arithmetisch
2	3	6	harmonisch

Hieraus wird deutlich, dass die äußeren der harmonischen Zahlen und gleichermaßen ihre Differenzen im selben Verhältnis zueinander stehen wie die äußeren der arithmetischen Proportion, aus denen sie auch entstanden ist, wie es das nächste Beispiel deutlich macht:

arithmetische Proportion	1, 2, 3	3, 7, 11	4, 6, 8	10, 60	100
harmonische Proportion	2, 3, 6	21, 33, 77	24, 32, 48	600, 1.000	6.000

<88>

Proposition II

Wie man von zwei beliebigen gegebenen Zahlen
die mittlere harmonische Proportionalzahl angibt

Zwischen zwei beliebigen Zahlen findet man die mittlere harmonische Proportionalzahl so: Man multipliziert die Zahl, welche die Differenz der beiden Zahlen ausmacht, mit der kleineren der Zahlen, teilt das Produkt durch die Summe beider [gegebenen] Zahlen und addiert das Ergebnis der Division zur kleineren Zahl. Die so gewonnene Zahl ist die gesuchte mittlere. Gegeben seien also zum Beispiel 15 und 60. Um die harmonische Mitte zu erhalten, multipliziert man ihre Differenz 45 mit der kleineren Zahl 15 und teilt das Produkt 675 durch 75, ihre Summe. Wenn man nun den Quotienten 9 zu der kleineren Zahl hinzuzählt, erhält man die mittlere Zahl 24, wie es im Beispiel deutlich wird: 15, 24, 60. Dieselbe mittlere Zahl findet man, wenn man die Differenz 45 mit der größeren Zahl 60 multipliziert, das Produkt 2.700 durch die Summe von beiden (75) dividiert und den Quotienten 36 von der größeren Zahl 60 abzieht, wodurch dieselbe mittlere Zahl 24 übrigbleibt.

Proposition III

Wie man zwei beliebigen Zahlen
die dritte harmonische Proportionalzahl zuweist

Man nehme zuerst zur Kenntnis, dass diese Operation nicht immer möglich ist. Wann man sie allerdings machen kann, das zeigt die Operation selbst sehr schön auf diese Weise. Wir dividieren das Produkt der beiden Zahlen durch die Zahl, die herauskommt, wenn man die Differenz beider von der kleineren Zahl abzieht.⁵ Dieser Quotient ist dann die dritte harmonische Zahl zu den beiden anderen, die wir gesucht haben. Wenn aber der Divisor Null sein sollte oder wenn man beider Differenz nicht von der kleineren Zahl abziehen

⁵ $b > a; c = (a \times b) / (a - (b - a)) = (a \times b) / (2a - b)$

kann,⁶ dann ist es eben unmöglich, zu diesen beiden Zahlen eine größere Zahl in der harmonischen Folge hinzuzufügen.

Wann man zwei Zahlen eine dritte in der harmonischen Folge
hinzufügen kann und wann nicht

Wir wollen die Sache durch ein Beispiel verdeutlichen. Gegeben sind die kleineren Zahlen [termini minores] 12 und 16. Wir dividieren ihr Produkt 192 durch 8, die Zahl also, die herauskommt, wenn wir 4, die Differenz zwischen ihnen, von der kleineren Zahl 12 abziehen. Der Quotient 24 $[192/8]$ bildet zusammen mit den beiden gegebenen Zahlen die harmonische Reihe 12, 16, 24. Also ist 24 die gesuchte dritte Zahl. Wir können diese Folge weiter fortführen, wenn wir zu den beiden Zahlen 16 und 24 eine dritte hinzufügen, indem wir das Produkt aus 16×24 , nämlich 384, durch 8 teilen, der Zahl nämlich, die als Ergebnis bleibt, wenn man die Differenz beider, nämlich 8, von der kleineren Zahl 16 abzieht. Man erhält die Zahl 48. Jetzt stehen vier Zahlen in der harmonischen Reihe: 12, 16, 24, 48. Wenn wir aber versuchten, diesen Zahlen noch eine weitere größere hinzuzufügen, würden wir uns vergeblich plagen. Denn für die beiden letzten Zahlen, 24 und 48, ergibt sich als Divisor 0. Wenn uns jemand die Zahlen 10 und 12 vorgibt, kann man ihnen als dritte größere Zahl 15 anfügen. Zu den beiden Zahlen 10 und 11 kann man als dritte $12\frac{3}{9}$ hinzugeben. Zu 90 und 99 heißt die dritte 110. Aber zu 3 und 6 kann man keine hinzufügen, weil ihre Differenz (3) von der kleineren abgezogen 0 ergibt. Daraus folgt: Wenn die gegebenen Zahlen in einem doppelten Verhältnis stehen, kann man ihnen keine dritte Proportionalzahl hinzufügen, weil ihre Differenz immer gleich der kleineren Zahl ist. Aber auch wenn beide Zahlen in einem mehr als doppelten Verhältnis stehen, gibt es keine dritte, größere Zahl, die zu ihnen in harmonischer Proportionalität steht, weil dann ihre Differenz stets größer ist als die kleinere Zahl, so dass man gar keine Subtraktion vornehmen kann. Wenn zum Beispiel 3 und 7 gegeben sind, deren Proportion die Proportio dupla sesquitercia ist, also größer als doppelt [dupla], dann sieht man, dass ihre Differenz (4) größer ist als die kleinere Zahl (3). Daher kann man den beiden keine dritte anfügen. Daraus wird deutlich, dass die zwei gegebenen beliebigen Zahlen, wenn man ihnen eine dritte in der harmonischen Folge sollte anfügen können, notwendig <89> entweder in der superpartikularen $[n; n + 1]$ oder in der superpartienten $[n; n+a (a < n)]$ und kleiner als doppelten Proportion stehen müssen.

Proposition IV

Wie man zu zwei beliebigen Zahlen die dritte
in der harmonischen Folge findet, die kleiner ist als beide

Diese [gesuchte] Zahl wird gebildet, indem man die eine mit der anderen multipliziert und das Produkt durch die Summe der größeren Zahl und beider Differenz teilt.⁷ Der Quotient ist dann die gesuchte Zahl. Sind beispielsweise die Zahlen 6 und 12 gegeben und teilt man deren Produkt 72 (aus 6×12) durch 18 (der Summe von 12 und beider Differenz 6), so erhält man die Zahl 4: die dritte harmonische Proportionalzahl, die kleiner ist als die beiden

⁶ $a \geq 2b$

⁷ $a < b; (a \times b) / (b+(b-a)) = (a \times b) / (2b-a)$

anderen. Diese können wir erweitern, indem man auf noch kleinere Zahlen zurückgeht, wenn man zu 4 und 6 noch die noch kleinere [Zahl] 3 hinzufügt und so die Reihe 3, 4, 6, 12 erhält. Diese dritte Zahl wird gefunden, wenn man die Zahl 24 (das Produkt aus 4 und 6) durch 8 teilt (die Summe aus 6 und beider Differenz 2). Auf die gleiche Weise könnte man den beiden kleineren Zahlen 3 und 4 als dritte noch kleinere $2\frac{2}{5}$ hinzufügen. Und so vermindert sich jedwede harmonische Analogiefolge fortwährend bis ins Unendliche.

Corollarium

Die Eigenheiten der Proportionalitäten

Aus all dem wird eine wunderbare Eigenheit der drei Proportionalitäten deutlich. Zuerst: Die arithmetische Proportion wächst bis ins Unendliche, lässt sich aber nicht bis ins Unendliche vermindern. Die harmonische Proportion dagegen vermindert sich bis ins Unendliche, kann aber nicht bis ins Unendliche wachsen. Wie also die erste, zweite und dritte Zahl eine harmonische Proportionalität bilden, so auch die zweite, dritte und vierte, ebenso die dritte, vierte und fünfte. Die geometrische Proportion kann nach oben wie nach unten bis ins Unendliche geführt werden.

Kapitel III

Rechenoperationen mit Proportionen

Die Zusammenfügung [compositio] oder Berechnung [logistica] von Verhältnissen ist nichts anderes als ein Algorithmus, durch den eine Proportion einer anderen hinzugefügt oder von ihr abgezogen wird. Dadurch werden die gegebenen Proportionen miteinander multipliziert oder durcheinander dividiert. Es gibt davon fünf Arten, die wir durch ebenso viele Propositionen erklären wollen.

Proposition I

Proportionen miteinander addieren

Die Addition von Proportionen bedeutet *das Auffinden zweier Zahlen, deren Verhältnis zueinander die vorgegebenen Verhältnisse enthält*. In der Praxis sieht das so aus: Man stelle die gegebenen Proportionen in ihren kleinsten Zahlenwerten [vollständig gekürzt] auf, dann multipliziert man die vorderen Werte [termini antecedentes] miteinander und bildet so aus zwei Werten den Vorderwert. Auf die gleiche Art bildet man auch durch die Multiplikation der hinteren Werte den Hinterwert. Daraus ist ersichtlich, dass die Addition von Proportionen sich nicht von der Multiplikation gewöhnlicher Brüche [fragmenta] unterscheidet.

<90> Ein Beispiel: Zu addieren seien die Proportionen 16 : 6 und 18 : 12. Wenn man diese Proportionen zuerst auf ihren kleinstzahligen Ausdruck reduziert, ergibt sich für 16 : 6 als minimaler Ausdruck 8 : 3, den man oben hinschreibt. Der minimale Ausdruck für die Proportion 18 : 12 ist 3 : 2, was man unter den Bruchstrich schreibt, was dann so aussieht $(8 \times 3) / (3 \times 2)$. Oben erhält man als Produkt 24, unten 6. Das Beispiel sähe dann so aus:

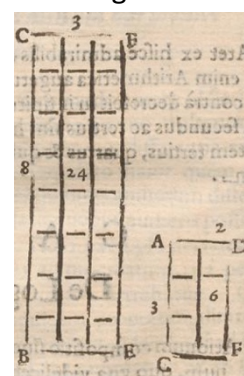
$$(8 \times 3) / (3 \times 2) \text{ ergibt } 24 : 6, \text{ das heißt } 4 : 1.$$

Um die Sache auf die Musik anzuwenden, sollen das die Proportiones sesquialtera [3 : 2], sesquiertia [4 : 3], sesquiquarta [5 : 4] und sesquiquinta [6 : 5] sein, das heißt, es handelt sich um Quinte [diapente], Quarte [diatessaron], große Terz [ditonus] und kleine Terz [semitritonus]. Man ordne diese Proportionen so an, wie man es unten sieht. Man multipliziert die größeren Zahlen miteinander, also $3 \times 4 = 12$, $12 \times 5 = 60$, $60 \times 6 = 360$. Das ist die Summe der größeren Zahlen. Genauso multipliziert man die kleineren Zahlen miteinander: $2 \times 3 = 6$, $6 \times 4 = 24$, $24 \times 5 = 120$. Das sind die kleinere Zahl der Proportion. Man erhält nun die Proportion 360 : 120, eine dreifache Proportion, was die Konsonanz »Oktave plus Quinte« [diapason cum diapente; 3 : 1] ist.

größere Zahlen	zu	kleinere Zahlen
3	sesquialtera	2
4	sesquiertia	3
5	sesquiquarta	4
6	sesquiquinta	5
360	tripla	120

Die Grundlage für diese Operation bezieht sich auf Satz V im achten Buch von Euklid, wo er sagt, dass die Maßzahlen von zwei Flächen sich zueinander verhalten wie eine aus den Seitenlängen gewonnene Zahl [ratio composita ex lateribus].

Ein Beispiel: Die beiden folgenden länglichen Rechtecke liefern uns zwei Flächengrößen. An ihnen wird klar, dass die Proportion 8 : 3 aus unserem obigen Beispiel die Seitenlängen CB und CF des ersten Rechtecks bildet, und die andere, 3 : 2, die Seiten AC und AD des zweiten. Deutlich ist, dass die Fläche des größeren Rechtecks CE, die 24 beträgt, im Verhältnis zur Fläche des kleineren Rechtecks, die 6 beträgt, in der vierfachen Proportion steht, die aus zwei Proportionen zusammengesetzt ist. Ebenso ergibt die Addition der Proportionen 3 : 2 und 2 : 1 das Ergebnis 6 : 2, das heißt 3 : 1 – also die Proportio tripla aus der sesquialtera [3 : 2] und der dupla [2 : 1] vor. So ergeben 2 : 1 + 2 : 1 die vierfache Proportion [quadrupla] oder Doppeloktave.



Proposition II

Eine Proportion von der anderen abziehen

Jetzt soll gezeigt werden, welche Proportionen übrig bleiben, wenn man Proportionen voneinander abzieht. Möglich ist das nur, wenn die Proportion, die abgezogen werden soll, kleiner ist als die, von der abgezogen wird, oder wenigstens gleich groß. Es liegt in der Natur der Sache, dass nicht etwas Größeres von dem abgezogen werden kann, was kleiner ist. Die Bezeichnungen [denominatores] der Proportionen geben an, welche größer und welche kleiner ist. So ist leicht zu entscheiden, dass die Proportio dupla größer ist als die Proportio sesquialtera, dass wiederum die dreifache die doppelte übertrifft etc. Diese Subtraktion ist leicht auszuführen und entspricht der Division von Brüchen. Denn wenn man die Proportion, von der man etwas abziehen muss, durch die Zahlen der abzuziehenden Proportion teilt, hat man die Aufgabe gelöst. So teilt man, wenn man die Proportio sesquialtera 3 : 2 von der doppelten abziehen soll, <91> 2 : 1 durch 3 : 2 und erhält 4 : 3, die Proportio sesquitertia. Oder, was das gleiche ist, wenn man eine Quinte von einer Oktave abzieht, muss notwendigerweise eine Quarte übrigbleiben, wie das im Folgenden noch ausführlicher gezeigt wird. Wenn man von der vierfachen [quadrupla] Proportion 4 : 1 die Proportio sesquialtera 3 : 2 abzieht, bleibt die Proportion 8 : 3 übrig, also die Proportio dupla superbipartiens tertias. So zieht man wiederum die Proportio sesquitertia von der Proportio sesquialtera ab. Die Proportionen werden wie folgt angeordnet:

3	Sesquialtera	2
	×	
4	Sesquitertia	3
8	Sesquioctava	9
	oder ein Ganzton.	

Man multipliziert sie also kreuzweise miteinander und erhält 8 : 9, die Proportio sesquioctava, in welcher der Ganzton besteht. Wie die Addition der Proportionen der Multiplikation von Brüchen gleicht, so die Subtraktion der Division von Brüchen. Die sicherste Probe der korrekten Subtraktion ist, wenn die Addition der sich ergebenden Proportion zu der Proportion, die abgezogen wurde, wieder die Proportion herstellt, von der abgezogen worden ist.

Proposition III

Proportionen multiplizieren

Man schreibe die Zahlen der zu multiplizierenden Proportion so oft hintereinander, wie der Multiplikator die Zahl 1 enthält. Darauf multipliziere man alle vorn stehenden Zahlen miteinander. Es erscheint die vordere Zahl der gesuchten Proportion. Auf gleiche Art findet man auch die hintere Zahl durch Multiplikation der hinteren Zahlen. Ein Beispiel: Die Proportio sesquialtera soll mit 3 multipliziert werden. Man schreibt 3 : 2 dreimal auf diese Weise: 3/2 3/2 3/2. Man multipliziert dann die Drei mit sich selbst, erhält 9, multipliziert diese wieder mit 3 und erhält als Ergebnis die vordere Zahl der gesuchten Proportion [27]. Ganz gleich multipliziert man dann 2×2 , erhält 4, multipliziert das wiederum mit 2 und erhält 8, die hintere Zahl der gesuchten Proportion. Die eineinhalbfache Proportion mit 3 multipliziert ergibt also $27 : 8$, die Proportio tripla supertripartiens octavas. Wenn man die Proportion [3 : 2] verdoppelt, erhält man $2\frac{1}{4}$,⁸ die Proportio dupla sesquiquarta.

Daher ist deutlich, dass das Verdoppeln einer Proportion nichts anderes bedeutet als die minimalen Zahlen der Proportion, wie man zu sagen pflegt, zu quadrieren. Und Verdreifachen ist dasselbe wie im Kubik zu multiplizieren, mit 4 zu multiplizieren nichts anderes als die Zahlenwerte, die man gemeinhin zensizensische oder quadrat-quadrierte [quadrato-quadratus] nennt, zu finden. Und umgekehrt bedeutet »eine Proportion zu halbieren« nichts anderes, als die Quadratwurzel ihrer Zahlen zu finden. Durch 3 zu teilen heißt dann, ihre Kubikwurzel zu finden. Durch 4 zu teilen, ist nichts anderes, als für die Zahlen der Proportion die zensizensische oder quadrat-quadrierten Wurzeln zu finden. Ein Beispiel: Die Proportio dupla sesquiquarta zu halbieren bedeutet, die Quadratwurzel aus $2\frac{1}{4}$ zu ziehen, welche $1\frac{1}{2}$ ist. Danach ist [die gesuchte] Proportion benannt, nämlich die Proportio sesquialtera. Diese ist meiner Erfahrung nach bei vielen Gelegenheiten sehr nützlich, so dass ich mich doch darüber wundere, weshalb etliche Leute, die durchaus gelehrt über Zahlen schrieben, uns überliefert haben, dass es die Natur der Sache verbiete, Proportionen zu multiplizieren und zu dividieren. Vielleicht lässt sich zu ihrer Entschuldigung sagen, dass sie nicht die Zahlen, sondern die Natur der Proportionen betrachtet haben. Wie man nämlich Blei, die Mischung aus Silber und Blei oder Gold und ähnliche Arten von Dingen nicht »miteinander multipliziert«, sondern nur deren Zahlenwerte, so wird auch nicht die eine Proportion mit der anderen multipliziert, sondern nur deren Zahlenwerte. Doch kann die Teilung von Proportionen sowohl durch Zahlen als auch durch andere Proportionen geschehen. Die Sache erfordert also einen Modus, nicht nur die Quadrat- und Kubikwurzeln zu finden, sondern auch die zensizensischen [vierte Wurzel], die zensikubischen [fünfte Wurzel], die zezensikubischen [siebte Wurzel] und die kubo-kubi-kubischen [neunte Wurzel]. Um nicht gezwungen zu sein, etwas zu sagen, was sich nicht an die vorausgegangenen Lehrsätze anschließt und den folgenden zuwiderläuft, haben wir uns den gesamten Stoff der algebraischen Halbierung für ein spezielles Werk vorbehalten, <92> nämlich für die *Ars combinatoria*. Doch für die Multiplikation und die Division von Proportionen fügen wir noch einige Beispiele an.

⁸ Bei Kircher steht fälschlich $2\frac{3}{4}$. Aber $(3/2)^2 = 9/4 = 2\frac{1}{4}$.

Proposition IV

Proportionen mit Brüchen multiplizieren

Zuerst multipliziere man die Proportion mit dem Nenner entsprechend der eben angegebenen Regel. Aus dem sich ergebenden Produkt ziehe man die Wurzel, welche durch den Zähler [denominator minutiae] bezeichnet wird.

Beispiel:

$81/16$ soll mit $\frac{3}{4}$ multipliziert werden. Zuerst nimmt man die vorgegebene Proportion hoch drei, indem man $81/16$, $81/16$ und $81/16$ miteinander multipliziert. Zähler und Nenner hoch drei ergeben $531.441/4.096$. Hat man dies gemacht, ziehe man aus beiden Zahlen die Quadratwurzel der Quadratwurzel [vierte Wurzel] und erhält $27/8$ als die gesuchte Wurzel. Wir nehmen die Quadratwurzel der Quadratwurzel, weil der Nenner, das heißt die 4, die Quadratwurzel der Quadratwurzel bezeichnet, die 2 aber die Quadratwurzel und die 3 die Kubikwurzel, wie dies in der cossischen Progression deutlich gezeigt wird.

Proposition V

Proportionen oder Verhältnisse durch Proportionen dividieren

So wie eine Anzahl von Spannen [Palmorum] entweder durch die Zahl der Spannen oder durch eine bloße Zahl geteilt wird, so wird auch eine Proportion entweder durch die bloße Zahl oder durch die Proportion geteilt. Wenn eine Proportion von einer Proportion geteilt wird, dann kommt heraus, wie oft die Zahl hineingeht, niemals aber die Proportion. Wenn man nämlich fragt, wie oft die teilende in der zu teilenden Proportion enthalten ist, kommt immer ein »wievielmals« [quotiens] heraus, das nicht Proportion genannt werden kann. Wird aber eine Proportion durch eine abstrakte Zahl geteilt, dann kommt als Ergebnis immer eine Proportion heraus. Aber zur Sache:

REGEL I

So teilt man Proportionen durch Proportionen: Man subtrahiere die teilende von der zu teilenden Proportion, bis Gleichheit hergestellt ist oder die Art der Proportion sich geändert hat. Das Ergebnis ergibt sich aus den Einsen, die anstelle der Subtraktionsschritte hingeschrieben werden. Denn pro Subtraktion wird eine Eins hingeschrieben.

Beispiel für das Erreichen der Gleichheit

Ich will zum Beispiel 729/64 durch $\frac{3}{2}$ teilen, das heißt durch die Proportio sesquialtera. Also ziehen wir die teilende Proportion von der zu teilenden solange ab, bis die Gleichheit erreicht ist. Wir zeigen das am Beispiel:

erste Subtraktion	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{729}{64}$	ergibt	$\frac{1.458}{192}$	oder	$\frac{243}{32}$
zweite Subtraktion	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{243}{32}$	ergibt	$\frac{486}{96}$	oder	$\frac{81}{16}$
<93> dritte Subtraktion	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{81}{16}$	ergibt	$\frac{162}{48}$	oder	$\frac{27}{8}$
vierte Subtraktion	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{27}{8}$	ergibt	$\frac{54}{24}$	oder	$\frac{9}{4}$
fünfte Subtraktion	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{9}{4}$	ergibt	$\frac{18}{12}$	oder	$\frac{3}{2}$
sechste Subtraktion	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{3}{2}$	ergibt	$\frac{6}{6}$	also	Gleichheit

Wann immer die Gleichheit auftritt, ist dies ein Zeichen dafür, dass die teilende Proportion die zu teilende ohne Rest teilt [numerare praecisè] und dass die teilende Proportion ein bestimmter Teil der zu teilenden Proportion ist. Weil hier sechs Subtraktionen vollzogen wurden, muss der Divisionsquotient 6 sein.

Ein anderes Beispiel, bei dem die Gleichheit nicht erreicht wird

Wenn es nicht zur Gleichheit kommt, sondern sich die Art der Proportion wandelt, bedeutet dies, dass die teilende Proportion ein gewisser Teil der zu teilenden Proportion ist, sie aber nicht ohne Rest teilt [non numerare]. Es sei zum Beispiel 2187/128 durch $\frac{27}{8}$ zu teilen:

erste Subtraktion	$\frac{8}{27}$	–	$\frac{2.187}{128}$	ergibt	$\frac{17.496}{3.456}$	oder	$\frac{81}{16}$
zweite Subtraktion	$\frac{8}{27}$	–	$\frac{81}{16}$	ergibt	$\frac{648}{432}$	oder	$\frac{3}{2}$
dritte Subtraktion	$\frac{8}{27}$	–	$\frac{3}{2}$	ergibt	$\frac{24}{54}$	oder	$\frac{4}{9}$

Hier erkennt man, dass die Art der Proportion sich geändert hat. Das Ergebnis ist nämlich eine Proportion der kleineren Ungleichheit, weshalb die dritte Subtraktion nicht erlaubt war. Da also zwei Subtraktionen gemacht wurden, ist der Quotient 2. Es bleibt ein Rest von

3/2. Diese Proportion ist der dritte Teil der teilenden Proportion.⁹ Die Teilung insgesamt ergibt also 21/3. Zwischen 2.187/128 und 17/8 besteht die Proportio dupla sesquitercia.

REGEL II

Proportionen durch ganze Zahlen teilt man so: Man ziehe aus beiden Zahlenwerten der Proportion die Wurzel, die der Divisor angibt.

729/64 geteilt durch 2 ergibt so 27/8. 729/64 geteilt durch 3 ergibt 9/4. 729/64 geteilt durch 6 ergibt 3/2.

REGEL III

Proportionen durch Brüche [minutiae sive numeri fracti] teilt man so: Man vertauscht Zähler und Nenner des teilenden Bruchs und verfährt gemäß der Regel für die Multiplikation mit Brüchen, die oben angegeben ist. Ich will zum Beispiel 27/8 durch $\frac{3}{4}$ teilen. Also schreibe ich die Proportion viermal hintereinander (also 27/4, 27/4, 27/4, 27/4), was miteinander multipliziert 531.441/4.096 ergibt. Dann zieht man aus beiden Zahlen des Ergebnisses die dritte Wurzel (denn »3« steht für die Kubikwurzel) und erhält 81/16. 27/8 geteilt durch $\frac{3}{4}$ ergibt also 81/16.

<94>

Kapitel IV

Die irrationalen Zahlen

Da in der Musik oft irrationale Zahlen erwähnt werden, durch welche Konsonanzen halbiert werden, scheint es mir, bevor wir weitergehen, für die vollständige Erkenntnis der musikalischen Dinge gut, diese hier zu erklären und zugleich anzugeben, wie man sie addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert.

Rational sind all die Proportionen, deren Zahlenwerte kommensurabel sind. Wenn die Zahlenwerte aber inkommensurabel sind, sind sie irrational. Deshalb steht jede Quadratwurzel [numerus medialis] zu einer rationalen Zahl in einer irrationalen Proportion. Aber nicht jede Quadratwurzel [Medialis] zu einer anderen Quadratwurzel, weil die $\sqrt{Q}$ [Quadratwurzel von, im Folgenden: $\sqrt{}$] 6 zur $\sqrt{24}$ in einer rationalen Proportion steht, nämlich in der doppelten.¹⁰ Wann immer ein Zahlenwert einer irrationalen Proportion irrational ist, muss der zweite Zahlenwert derselben Proportion auch irrational sein. Das ist jedoch zu bekannt, als dass es dafür eines Beispiels bedürfte.

⁹ Also $\sqrt[3]{(27/8)}$. Insofern ist 27/8 hier $2\frac{1}{3}$ mal enthalten.

¹⁰ $\sqrt{24} = 2 \times \sqrt{6}$

Irrationale Proportionen sind Bruchteile rationaler Proportionen. So ist zum Beispiel die $\sqrt[6]{6}$ zur $\sqrt[6]{2}$ ein Bruch der dreifachen Proportion: Es handelt sich dabei um die Hälfte der Proportio tripla oder der Oktave mit Quinte. So ist 6 zu $\sqrt[3]{432}$ der dritte Teil der Oktave oder der Proportio dupla, wie es aus der Regel hervorgeht, welche die Benennung der Proportionen vorschreibt. Wenn nämlich der größere Zahlenwert durch den kleineren geteilt wird, wird die Proportion nach dem Quotienten dieser Teilung benannt. Wenn $\sqrt[3]{432}$ zum Beispiel durch 6 (oder $\sqrt[3]{216}$) geteilt wird, ergibt sich als Quotient $\sqrt[3]{2}$. Die Zahl 2 bezeichnet eine doppelte Proportion, das Wurzelzeichen $\sqrt[3]{}$ den dritten Teil der genannten Proportion. Mehr dazu in unserer Algebra.

Daher wird, wenn man [zwei] beliebige rationale Zahlen nimmt und vor sie das Zeichen der Quadratwurzel schreibt, die Proportion zwischen jenen zwei rationalen Zahlen in zwei gleiche Proportionen aufgeteilt. Ein Teil dieser Teilung lässt sich durch Zahlen so darstellen: 3 : 2 hat die Proportio sesquialtera. Aber $\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{2}$ ergibt die Hälfte der Quinte oder der Proportio sesquialtera. Und in ähnlicher Weise muss man ähnliche Fälle verstehen. Wie $\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{2}$ den dritten Teil der Quinte oder des Eineinhalbfachen ergibt, so ergibt $\sqrt[4]{3} : \sqrt[4]{2}$ den vierten Teil der gleichen Proportion, und die $\sqrt[5]{3} : \sqrt[5]{2}$ ergibt $\frac{1}{5}$ der eineinhalbfachen Proportion. Und so ist es ebenso leicht, eine irrationale halbierende Proportion irgendeiner gewünschten Benennung gemäß aufzustellen, wie es ist, die gewünschte Proportion zu benennen. Wenn zum Beispiel der sechste Teil der Proportio tripla supertripartiens quintas $[3^{8/5}]^{11}$ gefordert wird, dann finde ich im zweiten Quotienten (der ja die Proportion benennt, hier also $3^{8/5}$) die beiden Zahlen 8 und 5. Vor diese Zahlen setze ich dann das Zeichen für die sechste Wurzel, also die $\sqrt[6]{8} : \sqrt[6]{5}$, und habe damit den sechsten Teil der Proportio tripla supertripartiens quintas gefunden.

Der Algorithmus für die weiteren irrationalen Proportionen beruht auf den gleichen sechs Regeln wie der Algorithmus für die rationalen, also scheint hier zum Verständnis nichts weiter erforderlich, als einige Rechenbeispiele kurz anzufügen.

<95>

Beispiel für Addition				Beispiel für Multiplikation			
$\sqrt[6]{18}$		6	9	$\sqrt[6]{18}$		9	
—	plus	—	ergibt	—	verdoppelt	ergibt	—
2		$\sqrt[6]{2}$	1	2		2	
Beispiel für Subtraktion				Beispiel für Division			
6		9	$\sqrt[6]{18}$	9		9	$\sqrt[6]{18}$
—	minus	—	ergibt — oder —		halbiert	ergibt $\sqrt[6]{}$	— oder —
$\sqrt[6]{2}$		1	2 $\sqrt[6]{2}$	2		2	2

Der Leser beachte, dass wir bisher die Proportionszahlen gleichsam nur abstrakt behandelt haben. In den folgenden Kapiteln des dritten Buchs wollen wir zeigen, wie die eben behandelten Proportionen durch den musikalischen Algorithmus auf die Töne der Musik angewendet werden müssen.

¹¹ Eine Proportio tripla supertripartiens quintas wäre eigentlich $18/5$. Da Kircher hier » $3^{8/5}$ « (= $23/5$) schreibt, müsste er von einer Proportio *quadrapla* supertripartiens quintas sprechen.

Kapitel V

Die musikalischen Intervalle

Hinsichtlich des musikalischen Klangs [sonus harmonicus] müssen insbesondere fünf Dinge beachtet werden:

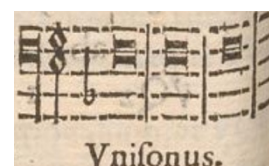
- I. Der Zustand oder die Spannung [tensio] der Stimme, was die Griechen τάσις [tásis] nennen, dem gemäß eine Stimme oder eine Saite in einem zum Gesang geeigneten Ton [tonus] eingerichtet wird.
- II. Die Anspannung [intensio] der Stimme – auf Griechisch ἐπίτασις (epítasis), wenn sie sich vom einem tiefen zum einem hohen Ton bewegt.
- III. Die Entspannung der Stimme – auf Griechisch ἄνεσις (ánesis), wenn sie sich von einem hohen zum einem tiefen Ton bewegt.
- IV. Aus Anspannung entsteht die Höhe der Stimme.
- V. Aus Entspannung die Tiefe.

Aus der Mischung der Klänge entstehen die verschiedenen Intervalle oder διαστήματα (diastêmata), weil ein Intervall nichts anderes ist als der Abstand zwischen einem hohen und einem tiefen Ton. Aus ihrer Kenntnis besteht das gesamte musikalische Tun – zu Recht, wie im Verlauf dieses Werks offenkundig werden wird. Denn weder Musik noch Harmonie können ohne diese Intervalle begriffen werden.

Man unterteilt die Gesamtheit der Intervalle in harmonische [concinnum] und unharmonische [inconcinnum]. Wie die harmonischen – auf Griechisch ἐμμελλῇ (emmelaē) – für die Harmonie geeignet sind, so sind die unharmonischen – auf Griechisch ἐκμελλῇ (ekmelaē) – für die Musik nicht geeignet. Diese betrachtet der Musiker akzidentiell [ex accidente], um sie zu verwerfen, jene hingegen an sich [per se], damit er sie beibehält oder die unharmonischen durch harmonische ersetzt. Von den harmonischen Intervallen gibt es zwei Arten, konsonante und dissonante. Konsonant sind solche, welche die Ohren mit einem süßen Zusammenklang übergießen. Die dissonanten, die einen unangenehmen Zusammenklang anbieten, sind dennoch für die musikalischen Zahlen geeignet.

Nach Einschätzung unserer Zeitgenossen [iuxta Neotericorum placita] gibt es 15 große und fünf kleine Intervalle. Große Intervalle sind solche, die aus ganzen Tönen und Halbtönen gebildet werden, kleine sind solche, die nur Teile von Tönen und Halbtönen sind. Zuerst soll über die großen Intervalle, dann über die kleinen gesprochen werden. Es gibt also 15 große Intervalle: *den Einklang* [Unisonus] (den wir gleichsam als ein Prinzip der Intervalle verstehen, und daher von der Bestimmung des Intervalls als Abstand zwischen einem hohen und einem tiefen Ton ausnehmen), *den Ganzton* [Tonus], *den Halbton* [Semitonium minus], *die große Terz* [Ditonus], *die kleine Terz* [Semiditonus], *den Tritonus*, *die Quarte* [Diatessaron], *die Quinte* [Diapente], *die verminderte Quinte* [Semidiapente], *den Halbton mit Quinte* [Semitonium cum diapente], *die große Terz mit Quinte* [Ditonus cum diapente], *die kleine Terz mit Quinte* [Semiditonus cum diapente], *<96> die Oktave* [Diapason] und *die verminderte Oktave* [Semidiapason]. Die übrigen Intervalle wie die Oktave mit Quinte [Diapason cum diapente], die Doppeloktave [Bisdiapason] und ähnliche Zusammensetzungen wollen wir übergehen, da sie das gleiche sind wie die einfachen Intervalle. Doch der Ordnung halber wollen wir jedes Intervall erklären.

Ein Einklang ist die Wiederholung ein und desselben Tons, ganz ohne jede Abweichung nach oben oder unten. Er ist in der Musik dasselbe, was in der Geometrie der Punkt, in der Arithmetik die Eins und im Kreis der Mittelpunkt ist. Aus ihm ergeben sich alle anderen Arten von Konsonanzen. Es ist auch die erste Mischung der Töne von denen, welche der [Hör-]Sinn wahrnimmt, und entsteht durch gleiche Klänge von derselben Spannung oder Tonhöhe [tonus]. Auf Griechisch nennt man ihn *ισόφωνος* (*isóphônos*). Dass er von allen Klängen am leichtesten erkennbar ist, lässt sich eindeutig begründen. Denn es ist ja viel leichter, denselben oder einen ähnlichen als einen unterschiedlichen oder ungleichen Ton zu singen. Das bekommt jeder Bauer hin, und alle Knaben und Mädchen machen es so, wenn sie tanzen, von der Natur selbst angeleitet. Auch die im Singen völlig unerfahrenen Menschen probieren es auf diese Art. Er steht in der Proportion der Gleichheit und verhält sich wie 1 : 1, 2 : 2, 3 : 3, 4 : 4 und so weiter.



Was ist ein Ganzton?

Nachdem wir den Einklang untersucht haben, wollen wir nun von den unvollkommenen Intervallen zu den vollkommenen wie auf einer Tonleiter [per gradus quosdam tonicè] voranschreiten.

[I.] An erster Stelle soll der Ganzton [tonus] stehen, der nichts anderes ist als ein musikalisches Intervall, durch welches sich eine Stimme von einer Note zur unmittelbar benachbarten Note auf- oder absteigend bewegt, wie etwa von *ut* zu *re* oder von *re* zu *mi*. (Ausgenommen sind hierbei die miteinander verbundenen *mi* und *fa*: Diese Klänge haben nämlich keinen Ganzton zwischen sich, sondern weniger als dessen Hälfte. Aber voneinander getrennt oder mit anderen verbunden, ergeben sie genauso einen Ganzton wie andere auch. So von *mi* zu *re* oder von *fa* zu *sol*.) Das stellten die Griechen durch zwei beliebige Saiten dar, ausgenommen jene Saiten, die den kleinen Halbton zwischen sich tragen, wie später erklärt werden wird. Dieses Intervall eines Tons ergibt sich aus der Proportio sesquioctava, es verhält sich wie 9 : 8. Es besteht aus einem großen und einem mittelgroßen Halbton, was wir gleich zeigen wollen. Die Formen der Halbtöne werden in ihren kleinsten Zahlenwerte wie folgt gesetzt:

15	:	16	–	großer Halbton
128	:	136	–	mittlerer Halbton

Dann multipliziere man Zähler und Nenner jeweils miteinander und teile beide Ergebnisse bis zum minimalen Ausdruck [divisa per minimum divisorem utrique producto communem]. Heraus kommt als Quotient 8 : 9, der gesuchte große Ganzton. Hier freilich betrachten wir den großen Ganzton. Wenn wir den kleinen betrachten würden, so hätte er die Proportio sesquinona [$1\frac{1}{9}$], er verhält sich also wie 10 zu 9. Er setzt sich aus einem großen und einem kleinen Halbton zusammen. Das wird so überprüft:

16	:	15	–	großer Halbton
25	:	24	–	kleiner Halbton

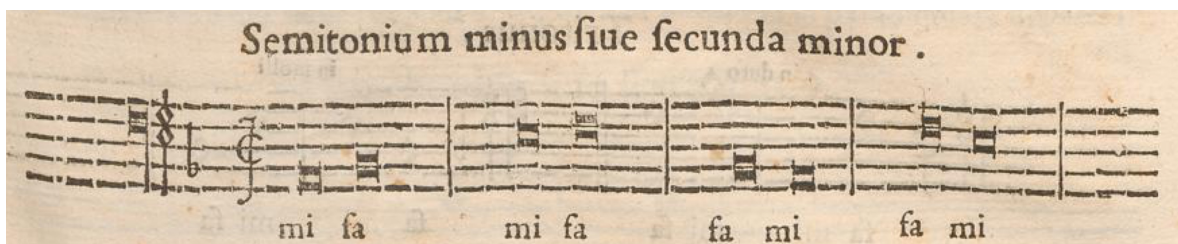
Da die Form der Halbtöne so ist, wie hier dargestellt, multipliziert man 16 mit 15 und dann 25 mit 24 und reduziert das Ergebnis auf den kleinsten Ausdruck.¹² Dann kommt der gesuchte kleine Ganzton mit 9 : 10 heraus. In Musiknoten sieht das so aus:



Was ist ein kleiner Halbton?

II. Ein kleiner Halbton oder eine unvollkommene Sekunde ist ein musikalisches Intervall mit der Proportio sesquivigesima quarta, es verhält sich wie 24 : 25. Dadurch bewegt sich eine Stimme von *mi* zu *fa*, und dieses Intervall ist von so großer Bedeutung, dass sich darauf wie auf eine Basis oder ein Fundament die Spannweite und der Reichtum der ganzen Musik zu stützen scheinen, was im Folgenden ausführlich untersucht wird. Dieses Intervall wird bei den Griechen im Tetrachord ὑπατῶν [hypaton] durch die Saiten Hypate und Parhypate, im Tetrachord διεzeugμένων [diezeugmenon] durch Paramese und Trite, im Tetrachord ὑπερβολεῶν [hyperboleon] durch Nete-διεzeugμένων [diezeugmenon] und Trite-ὑπερβολαιῶν [hyperbolaion] ausgedrückt, die <97> alle im Folgenden ausführlich erklärt werden.

Die kleine Sekunde wird in Musiknoten so ausgedrückt:



Ditonus

III. Der Ditonus oder die vollkommene [große] Terz ist ein musikalisches Intervall, das in der Proportio sesquiquarta [$\frac{5}{4}$] besteht und sich wie 5 : 4 verhält. Bei ihr geht die Stimme vom Einklang zwei Ganztöne aufwärts oder abwärts. Man nennt sie auch »große Terz« oder »enharmonische Terz«. Sie setzt sich aus einem großen und einem kleinen Ganzton zusammen, was sich so beweisen lässt: Man multipliziert die Proportionen beider Töne

¹² Das ist falsch. Multipliziert werden muss 16×25 und 15×24 , was $400/360 = 10/9$ ergibt.

miteinander, und der kleinste gemeinsame Teiler ergibt als Quotienten $4/5$, das ist der gesuchte Ditonus, wie man sieht.

$$\frac{9}{8} \times \frac{10}{9} = \frac{90}{72} > 3 \text{ als gemeinsamer Teiler: } \frac{5}{4}$$

Diese Terz haben auch die modernen Musiker, die entgegen der Meinung der Pythagoräer auf Vernunft und Erfahrung vertrauen, eingeführt. Dieses Intervall stellt im enharmonischen Tongeschlecht den Abstand zwischen den Saiten Nete und Paranete dar. Wir haben den Charakter dieses Intervalls in der Musica arithmetica als Nummer II dargestellt. In Musiknoten wird es so ausgedrückt:



Was ist der Semiditonus?

IV. Der Semiditonus wird auch unvollkommene oder kleine Terz, kleiner Trihemitonum, chromatische Terz und anders genannt. Er ist ein musikalisches Intervall, durch das eine Stimme sich vom Einklang auf- oder abwärts einen Ganzton und einen mittleren oder kleinen Halbton entfernt. Er besteht in der Proportio sesquiquinta und verhält sich wie 6 zu 5. Er besteht aus einem großen Ganz- und einem großen Halbton, was so bewiesen wird: Man multipliziert die Zahlenwerte des großen Ganz- und des großen Halbtons miteinander und teilt das Produkt durch den kleinsten gemeinsamen Teiler. Übrig bleibt dann der Quotient $6/5$. Es gibt zwei Gestalten davon, nämlich von *re* nach *fa* und von *mi* nach *sol*. Durch diese Konsonanz werden die Saiten Nete und Paranete im chromatischen Tongeschlecht geschieden.

$\frac{9}{8}$	$\times$	$\frac{8}{15}$	großer Ganzton
16		15	großer Halbton
144	:	120	kleine Terz
	3		Teiler
6	:	5	Wurzelzahl des Semiditonus

In Noten wird das so dargestellt:



Was ist ein Tritonus?

V. Der Tritonus, die große oder harte Quarte, ist für das diatonische Tongeschlecht ungeeignet. Dies ist ein musikalisches Intervall, bei dem die Stimme sich drei Ganztöne auf- oder abwärts bewegt. »Tritonus« nennt man es, <98> weil es aus drei Ganztönen besteht und in der Proportion sich wie 45 zu 32 verhält. In Noten wird es so dargestellt:



Diatessaron

VI. Die Diatessaron oder Quarte (sie wird auch »Tetrachord«, »Numerus epitritus« [ein Ganzes und ein Drittel enthaltende Zahl], »kleinste [vollkommene] Konsonanz«, »erster Zusammenklang« oder »erste Harmonie« genannt) wird aus einem großen Ganzton, einem kleinen Ganzton und einem großen Halbton gebildet. Bewiesen wird das wie oben. Sie ist ein musikalisches Intervall, bei dem sich die Stimme über zwei Ganztöne und einen kleinen Halbton auf- oder abwärts bewegt. Es besteht nämlich aus zwei Ganztönen und einem Halbton in der Proportio sesquitertia und verhält sich wie 4 : 3. Sie ist die Seele der gesamten Musik. An ihr scheiden sich alle harmonischen Systeme. Man stellt sie in Noten so dar:



Diapente

VII. Die Diapente oder die vollkommene [reine] Quinte ist ein musikalisches Intervall, bei dem sich die Stimme vom Einklang auf- oder absteigend über drei Ganztöne und einen kleinen Halbton oder über zwei große und einen kleinen Ganz- und einen großen Halbton

bewegt. Es besteht in der Proportio sesquialtera und verhält sich wie 3 : 2. Nach der [Proportio] dupla oder der Oktave ist es die edelste aller Konsonanzen. Man nennt es auch Pentachordum, Hemiole oder noch anders. In Noten stellt man sie so dar:



Semidiapente

VIII. Die Semidiapente oder unvollkommene, verminderte Quinte ist ein musikalisches Intervall, bei dem sich die Stimme über zwei Ganz- und ebenso viele kleine Halbtöne bewegt. Man nennt es landläufig auch die Quinta falsa [falsche Quinte], und sie wird von den Musikern nur in bestimmten Fällen zugelassen. Sie verhält sich wie 64 : 45. Man stellt sie in Noten so dar:



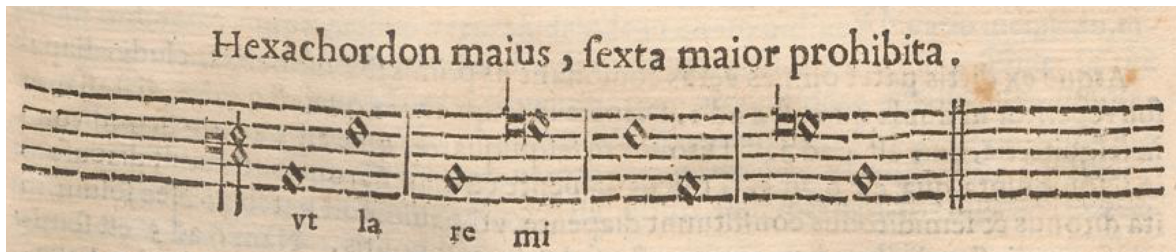
<99>

Das kleine Hexachord

IX. Das »kleine Hexachord«, die unvollkommene Sexte oder der Halbton mit Quinte [kleine Sexte] ist ein musikalisches Intervall, bei dem sich die Stimme über die drei Ganztöne und zwei kleinen Halbtöne, aus denen es besteht, auf- oder abwärts bewegt. Es besteht in der Proportio supertripartiens quintas und verhält sich wie 8 : 5. In Noten wird es so dargestellt, wie es das Beispiel zeigt:



X. Das »große Hexachord« oder die vollkommene Sexte, der Ganzton mit Quinte [große Sexte] ist ein für die Harmonie gleichsam unpassendes musikalisches Intervall, bei dem sich die Stimme auf- oder abwärts über vier Ganztöne und einen kleinen Halbton bewegt. Es besteht in der Proportio super[bi]partiens tertias und verhält sich wie 5 zu 3. Es wird von den Alten durch die Saiten Hypate – Meson dargestellt, wie folgt:



XI. Der Ditonus mit Diapente (große Terz mit Quinte), die große Septime, ist ein Intervall aus fünf Ganztönen und einem kleinen Halbton. Sein Aufstieg geht von C nach $\flat$ (b *mi*). Zur Oktave fehlt ein kleiner Halbton, gegenüber der unvollkommenen Oktave, der Semidiapason, steht ein Komma mehr. Dies ist ein musikalisches Intervall in der Proportio superseptupartiens octavas und verhält sich wie 15 : 8. Wie es in Noten ausgedrückt wird, sieht man hier:



XII. Der Semiditonus mit Diapente (kleine Terz mit Quinte), die kleine Septime, ist ein musikalisches Intervall, bei dem die Stimme sich vom Einklang über vier Ganztöne und zwei kleine Halbtöne bewegt, zum Beispiel von D nach C. Ihm fehlt zur Oktave ein Ganzton. Es besteht in der Proportio superquadrupartiens quintas und verhält sich wie 9 zu 5. Zum Beispiel:



XIII. Diapason ist die Königin aller Konsonanzen, sie fasst in sich alle bisher genannten Intervalle. Die vollkommene Oktave ist ein musikalisches Intervall, das aus Quinte und Quarte besteht, bei dem sich die Stimme um fünf Ganztöne und zwei kleine Halbtöne bewegt. Es ist der menschlichen Stimme eingegeben, weil ja nichts leichter fällt, als eine Oktave zu singen. Das ist bei Knaben zu bemerken, die sofort in der Oktave singen, wenn ihr Lehrer sie auffordert, denselben Ton wie er zu singen, wobei sie glauben, den gleichen Ton zu singen. Die Oktave besteht in der Proportio dupla, welche die erste der ungleichen Proportionen ist und der Gleichheit am nächsten kommt, genau wie die Oktave dem Einklang. Darüber wird ausführlich in unserer Musica physiologia gesprochen.

XIV. Semidiapason, oder unvollkommene [verminderte] Oktave, ist ein musikalisches Intervall, bei dem die Stimme sich um vier Ganz- und drei kleine Halbtöne bewegt. Sie wird in Musiknoten so dargestellt:



Aus dem Gesagten geht hervor, dass alle richtigen Konsonanzen in den ersten sechs Zahlen gefunden werden können.¹³ Die Oktave findet man in der Proportio dupla, also 2 : 1, die Quinte in der Proportio sesquialtera, also 3 : 2, die Quarte in der Proportio sesquitercia, also 4 : 3, die Terz in der sesquiquarta, also 5 : 4, die kleine Terz in der sesquiquinta, also 6 : 5. Und wie Quinte und Quarte gemeinsam die Oktave ergeben, so die große Terz mit der kleinen Terz die Quinte, wie bald deutlich werden wird. Das gilt nicht nur für die einfachen Konsonanzen, sondern auch für die zusammengesetzten. Denn 6 : 5 ist die kleine Terz, 6 : 4 die Quinte, 6 : 3 die Oktave, 6 : 2 die Oktave mit Quinte, 6 : 1 die Oktave mit Quinte. 5 : 4 ist die große Terz, 5 : 3 die große Sexte [Hexachordum maius] oder große Terz mit Quarte, 5 : 2 die Oktave mit Quinte, 5 : 1 Oktave mit großer Terz. 4 : 3 ist die Quarte, 4 : 2 die Oktave, 4 : 1 die Doppeloktave. 3 : 2 ist die Quinte, 3 : 1 Oktave mit Quinte, 2 : 1 Oktave, wie es das folgende Schema zeigt:

¹³ Vgl. Zarlino's Senario in den *Istitutioni harmoniche*.

6 : 1 – Oktave plus Quinte	5 : 1 – Oktave plus Terz	4 : 1 – Doppeloktave
6 : 2 – Oktave mit Quinte	5 : 2 – Oktave plus Quinte	4 : 2 – Oktave
6 : 3 – Oktave	5 : 3 – große Sexte	4 : 3 – Quarte
6 : 4 – Quinte	5 : 4 – große Terz	4 : 4 – Einklang
6 : 5 – kleine Terz	5 : 5 – Einklang	
6 : 6 – Einklang		
3 : 1 – Oktave plus Quinte	2 : 1 – Oktave	1 : 1 – Einklang
3 : 2 – Quinte	2 : 2 – Einklang	
3 : 3 – Einklang		

<101>

Ein Beispiel, das alle musikalischen Proportionen bündig darstellt

1	2	3	4	5	6						
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Sesquial- tera	Sesquiter- tia	Sesquiquar- ta	Sesquiquin- ta	Sesquisept- ima	Sesquioct- ava	Sesquideci- ma	Sesquidodeci- ma				
Diapason	Diapente	Diatessaron	Ditonus	Semiditonus							

Man sieht, wie in dieser Tabelle die Zahlen der superpartikularen Reihe angeordnet sind.¹⁴ Darin findet man nicht nur tatsächlich die Form aller einfachen Konsonanzen, sondern auch der gemischten und zusammengesetzten. Gewiss ist in diesem einzigartigen Beispiel eine göttliche Macht der Zahlen verborgen. Wenn man diese Tabelle weiter fortführen würde, würde man nicht nur die schon beschriebenen Konsonanzen, sondern auch noch die kleinsten Intervalle erkennen können. Wir haben diese Tabelle nach dieser Methode geordnet, so dass in der ersten Zeile die sechs natürlichen Zahlen in ihrer Reihenfolge stehen, in der zweiten Zeile, wie man sieht, die natürlichen Zahlen von der Zwei angefangen bis zur Zwölf in Reihenfolge. Wenn man diese Zahlen korrekt untereinander anordnet, erkennt man unfehlbar die Proportionen aller bisher besprochenen Konsonanzen, wobei besonders wunderbar ist, dass die Zahlen, die direkt übereinander stehen, immer in der Proportio dupla stehen. Betrachtet und kombiniert man sie entsprechend der natürlichen Reihenfolge, ergeben sich superpartikulare Proportionen; werden sie aber diagonal angeordnet, ergeben sich superpartikulare und superpartiente Proportionen.

¹⁴ Sie entwickelt sich also $n_{m+1} = n_m + 1$.

Kapitel VI

Die kleinen Intervalle

1. Der **große Ganzton**, auch »große Sekunde« und »Sesquioctava« genannt, ergibt sich als Intervall aus dem Überstand der konsonanten Quinte gegenüber der Quarte. Bei ihm bewegt sich die Stimme von *ut* nach *re* oder von *sol* nach *la*, wie oben gezeigt. Ich habe gesagt, dass der Ton durch den Überstand von Quinte und Quarte entsteht, denn die Proportionen sesquialtera und sesquitertia unterscheiden sich durch die Proportio sesquioctava; $6 : 9$ ist die Quinte, $6 : 8$ die Quarte, ihre Differenz also ist $\frac{8}{9}$, die Proportio sesquioctava oder der große Ganzton.
2. Der **kleine Ganzton** wird auch »Sekunde« und »Sesquinona« genannt. Er steht in dieser Proportion und muss *entweder* als kleinerer Teil der großen Terz betrachtet werden, die in einen großen und einen kleinen Ganzton aufgeteilt ist (wie dies aus den Zahlen 8, 9, 10 deutlich wird¹⁵) *oder* aus dem Überstand der großen Sexte gegen die Quinte. Die Proportio superbipartiens tertias $[3 : 5]$ oder die große Sexte überragt die Proportio sesquialtera $[2 : 3]$ um eine Proportio sesquinona, wie dies aus den Zahlen 6, 9, 10 deutlich wird. Man kann den kleinen Ganzton auch als den Überstand der Quarte gegenüber der kleinen Terz betrachten, denn die Proportio sesquitertia überragt die sesquiquinta um eine sesquinona, wie aus den Zahlen 12, 10, 9 deutlich wird.
3. Der **große Halbton** ist ein Intervall, das sich aus dem Überstand ergibt, um den die Quarte die große Terz überragt. Da die Quarte in der Proportio sesquitertia $[4 : 3]$, die Terz in der sesquiquarta $[4 : 5]$ besteht, muss dieses Intervall in der Proportio sesquidecimaquinta $[15 : 16]$ bestehen, wie dies aus den Zahlen 16, 15, 12 deutlich wird. Aus diesem Halbton wird zusammen mit dem großen Ganzton die kleinste [unvollkommene] Konsonanz gebildet, die wir Semiditonus oder kleine Terz nennen.
4. Der **kleine Halbton** ist das kleinste Intervall, das sich aus dem Überstand von Konsonanzen ergibt, da er aus dem Überstand der großen Terz gegenüber der kleinen Terz besteht, <102> welches ja die letzten [kleinsten] Konsonanzen sind. Da die große Terz ganz offensichtlich in der Proportio sesquiquarta $[4 : 5]$ besteht, die kleine Terz aber in der sesquiquinta $[5 : 6]$, muss der kleine Halbton in der Proportio sesquivigesimaquarta $[24 : 25]$ bestehen, was aus den Zahlen 25, 24, 20 deutlich wird. Ob dieses Intervall mit dem pythagoreischen Limma identisch ist, soll an anderer Stelle entschieden werden.
5. **Diësis** ist ein sehr kleines Intervall, das aus dem Überstand entsteht, um den der große Halbton den kleinen überragt. Da bereits gesagt wurde, dass der große Halbton in der Proportio sesquidecimaquinta $[15 : 16]$ besteht, der kleine in der Proportio sesquivigesimaquarta $[24 : 25]$, muss das Intervall der Diësis in der Proportio supertripartiens 125 $[125 : 128]$ bestehen, wie es die Zahlen 120, 125, 128 zeigen.
6. Das **Komma** ist das kleinste wahrnehmbare Intervall. Es entsteht aus der Differenz von großem und kleinem [Ganzton]. Da der große Ganzton in der Proportio sesquioctava

¹⁵ $8 : 10$ = große Terz; $8 : 9$ = Ganzton; also $9 : 10$ = Überstand.

besteht, der kleine in der Proportio sesquinona, muss daraus die Proportio sesquioctavesima [80 : 81] werden, aus der nach unserer Behauptung das Komma besteht, was auch durch die Zahlen 72, 80, 81 klar wird.

Da wir diese und ähnliche Intervalle im Folgenden ausführlich behandeln wollen, erscheint es mir überflüssig, hier länger bei ihnen zu verweilen.

Die Teilung des Ganztons.

Hier bleibt nur noch übrig, gleichsam im Vorübergehen die Teilung des Ganztons zu erklären. Man muss also wissen – wie es auch im Folgenden ausführlich erklärt werden wird –, dass ein Ganzton nicht in zwei gleiche Teile geteilt werden kann, weil eine superpartikuläre Proportion $[(n+1) : n]$, in der auch der Ganzton steht, nicht in zwei gleiche Teile geteilt werden kann. Der Ganzton steht in der Proportio sesquioctava und wird in den großen und den kleinen Halbton unterschieden. Die Griechen nannten den großen Halbton ἀποτομήν [apotomên], den kleinen διήσιν [diësis] oder, wie die Pythagoreer, λείμμα [leimma]. Der kleine Halbton zerfällt in zwei Diaschismen. Als Komma bezeichnet man das, wodurch der große Halbton den kleinen überragt. Eine Diësis selbst wird wiederum in zwei Schismen unterteilt, wie es Philolaos meint.

Eine Diësis ist das Intervall, um das die Proportio sesquiertia $[4 : 3]$ größer ist als zwei Ganztöne. Komma ist das Intervall, um das die Proportio sesquioctava größer ist als zwei Diësen, d. h. kleine Halbtöne. Schisma ist die Hälfte eines Kommas, Diaschisma ist nach Philolaos die Hälfte einer Diësis, also eines kleinen Halbtons. Dabei muss man wissen, dass [der Begriff] »Diësis« hier einmal eigentlich, einmal uneigentlich gebraucht wird: eigentlich, wenn man den Begriff für einen kleinen Halbton verwendet, uneigentlich, wenn er von den Alten für ein Diaschisma gebraucht wird.

Der kleine Halbton hat nicht genau vier Kommata, aber mehr als drei. Wie auch der große Halbton nicht genau fünf Kommata, aber mehr als vier hat, so ist [auch hier] klar, dass der Ganzton mehr als acht Kommata hat und sie immer ausfüllt, wie dies ausführlich von Boethius gelehrt wird in den Kapiteln 14 und 15 seines dritten Buches [von Inst. mus.]. Doch soll dies durch das folgende Schema deutlicher werden.

Wie der kleine Halbton hier verstanden werden soll.

Damit für den Leser hier kein Zweifel entsteht, was er unter »kleiner Halbton« verstehen soll, soll er wissen, dass man den kleinen Halbton auf zweierlei Art auffassen kann: entweder als Stufe im diatonischen oder im chromatischen Tongeschlecht. Als Stufe im diatonischen Tongeschlecht nennt man ihn aus dem Grund »kleinen Halbton« oder »Diësis« (wie ihn Boethius bezeichnet), weil er das kleinste natürliche Intervall in diesem Geschlecht ist. Was seine Proportion $16 : 15$ angeht, ist er jedoch größer als der kleine Halbton des chromatischen Tongeschlechts, der die Proportion $25 : 24$ hat.

Von den Autoren wird er ohne Unterschied mal »größerer«, mal »kleinerer Halbton« genannt. Größer ist er, wenn man ihn mit dem kleinen chromatischen Halbton vergleicht, kleiner, wenn man das diatonische Tongeschlecht betrachtet, in welchem er das kleinste Intervall ist. Das alles wollen wir hier entwirren, damit der Leser nicht durch

<103>



Nach der Definition der einzelnen Intervalle bleibt uns nur noch übrig, kurz ihre Herleitung in Augenschein zu nehmen. Das geschieht, indem wir zuerst die Proportion jedes einzelnen Intervalls aufschreiben, beginnend mit dem kleinsten.

Tabelle der Intervallproportionen in grundlegenden oder minimalen Werten
[in terminis radicalibus, seu minimis]

Komma	80 : 81
Diaschisma	160 : 162
enharmonische Diësis	128 : 125
Diësis / pythagoreisches Limma	243 : 256
pythagoreische Apotome	2.048 : 1.187
kleiner Halbton	25 : 24
großer Halbton	16 : 15
kleiner Ganzton	10 : 9
großer Ganzton	9 : 8
kleine Terz	6 : 5
große Terz	5 : 4
Quarte	4 : 3
Tritonus	45 : 32
verminderte Quinte	64 : 45
Quinte	3 : 2
große Sexte	5 : 3
kleine Sexte	8 : 5
kleine Septime	9 : 5
große Septime	15 : 8
Oktave	2 : 1

<104> Hiermit kann man sehen, wie die Zusammensetzung, Teilung und der Überstand der einzelnen Intervalle mit den Mitteln der Arithmetik herausgefunden werden.

Proposition I

*Herausfinden, um wie viel die kleine Terz
den großen und den kleinen Ganzton überragt*

Erstens stellt man die Proportionen der kleinen Terz und des großen Ganztons in ihren kleinsten Zahlenwerten auf, wie folgt.

Zweitens multipliziert man die Proportionen über Kreuz und erhält 48 aus 6×8 und 45 aus 5×9 , wie man sieht.

Drittens suche man den gemeinsamen Teiler für beide Produkte und erhält so 3. Wenn man beide durch 3 teilt, erhält man 16 und 15. Weil dies die Proportion des großen Halbtons ist, folgt notwendig, dass die kleine Terz den großen Ganzton um einen großen Halbton überragt.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcl}
 6 & \text{kleine Terz} & 5 \\
 & \times & \\
 9 & \text{großer Ganzton} & 8 \\
 \hline
 45 & & 48 \\
 & 3 & \\
 & \text{gemeinsamer Teiler} & \\
 \hline
 & 15 \text{ kleiner Halbton} & 16
 \end{array}$$

Proposition II

Wenn man wissen will, um wie viel eine kleine Terz einen kleinen Ganzton überragt

Erstens: Man stelle die kleinsten Zahlenwerte der Proportionen so auf, wie man es sieht.

Zweitens: Man multipliziere sie über Kreuz und erhält die Produkte 54 und 50. Das ist die Proportio superbipartiens 25, die Gestalt eines großen Halbtons und eines Kommas. Die Produkte bringe man durch einen gemeinsamen Teiler auf ihre kleinsten Zahlenwerte. Halbiert ergeben sie 27 und 25, die Proportio superbipartiens 25. Das ist, wie bereits gesagt, die Proportion des großen Halbtons mit einem Komma, und zugleich der gesuchte Überstand, um den die kleine Terz den kleinen Ganzton überragt.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcl}
 6 & 5 & \text{kleine Terz} \\
 & \times & \\
 10 & 9 & \text{kleiner Ganzton} \\
 \hline
 54 & 50 & \text{großer Halbton mit Komma} \\
 27 & 25 & \text{das Gleiche in kleinsten Zahlenwerten}
 \end{array}$$

<105>

Proposition III

Den Überstand finden, um den die große die kleine Terz überragt

Erstens: Man stelle die Proportionen beider Terzen in den kleinsten Zahlenwerten auf.

Zweitens: Man multipliziere sie kreuzweise und erhält 25 und 24, die Proportio sesquigigesimaquarta, in der der kleine Halbton besteht, was dem gesuchten Überstand der großen über der kleinen Terz entspricht.

Rechnung:

5	4	große Terz
	×	
6	5	kleine Terz
25	24	kleiner Halbton

Proposition IV

Den Überstand der Quinte über dem Tritonus finden

Man stelle die Proportionen des Tritonus und der Quinte in den kleinsten Zahlenwerten auf, multipliziere sie kreuzweise und erhält 96 und 90, die Werte des großen Halbtons in größeren, zusammengesetzten Zahlenwerten. Wenn man diese durch einen gemeinsamen Teiler teilt, also durch 6, ergibt das 16 und 15, die Proportio sesquidecimaquinta, in welcher, ausgedrückt in kleinsten Zahlenwerten, der große Halbton besteht.

Rechnung:

3	2	Quinte
	×	
45	32	Tritonus
90	96	großer Halbton in großen Werten
	6	Teiler
15	16	großer Halbton in kleinsten Werten

Proposition V

Den Überstand der [reinen] Quinte über die verminderte Quinte finden

Man stelle, wie eben, die Quinte und die verminderte Quinte in ihren kleinsten Werten auf, multipliziere sie kreuzweise und erhält [135] und 128, also die Proportio superseptima-partiens 128, in welcher der kleine Halbton mit einem Komma besteht. Das ist der gesuchte Überstand.

Rechnung:

3	2	
	×	
64	45	verminderte Quinte
128	135	kleiner Halbton mit Komma

<106>

Proposition VI

Nach Subtraktion der kleinen Septime von der großen bleibt als Rest ein kleiner Halbton

Man multipliziert beide Zahlen kreuzweise und erhält 72 und 75, teilt beide durch den gemeinsamen Teiler 3, das ergibt 24 und 25, den gesuchten Rest.

Rechnung:

15	8	große Septime
×		
9	5	kleine Septime
72	75	kleiner Halbton in großen Werten
3		Teiler
24	25	kleiner Halbton in Wurzelzahlen

Proposition VII

Durch Subtraktion der kleinen Terz von der großen verbleibt ein kleiner Halbton

Man multipliziert die Zahlen kreuzweise und erhält 24 und 25, also den kleinen Halbton als Rest.

Rechnung:

5	4	große Terz (Proportio sesquiquarta)
×		
6	5	kleine Terz (Proportio sesquiquinta)
24	25	kleiner Halbton (Proportio sesquivigesimaquarta)

Proposition VIII

*Durch Subtraktion des großen Ganztons von der kleinen Sexte
bleibt die verminderte Quinte übrig*

Man multipliziert die Zahlen kreuzweise und das Ergebnis ist die gesuchte verminderte Quinte.

Rechnung:

8	5	kleine Sexte
	×	
9	8	großer Ganzton
45	64	verminderte Quinte

Proposition IX

Durch Subtraktion eines großen Halbtons von der Quinte bleibt der Tritonus und durch Subtraktion des Tritonus von der Quinte bleibt der große [Halb-]Ton

Rechnung I:

3	2	Quinte
	×	
16	15	großer Halbton
32	45	Tritonus

Rechnung II:

3	2	Quinte
	×	
[45]	[32]	[Tritonus]
90	96	[großer Halbton]
Teilen durch 6		
15	16	

<107>

Proposition X

Durch Subtraktion der großen Terz von der Quarte bleibt der große Halbton

Rechnung:

4	3	Quarte
	×	
5	4	große Terz
15	16	großer Halbton

Proposition XI

Wie man die Summe der Addition von großem und kleinem Ganzton bildet

Möchte man das Ergebnis der Addition eines großen und eines kleinen Ganztons wissen, so nehme man die kleinsten Werte der besagten Intervalle und multipliziere sie wie folgt senkrecht, das heißt: die oberen mit den unteren. So erhält man die Produkte 96 und 72 und somit die große Terz in zusammengesetzten Werten. Wenn man diese durch den

gemeinsamen Teiler auf den minimalen Wert bringt, erhält man 5 und 4, die Proportio sesquiquarta, welche der großen Terz zukommt. Aus der Addition von großem und kleinem Halbton entsteht also die große Terz oder der Ditonus.

Rechnung:

	9	8	großer Ganzton
	10	9	kleiner Ganzton
	90	72	große Terz
18			[Teiler]
	5	4	große Terz



Proposition XII

Die Quarte setzt sich aus der kleinen Terz und dem kleinen Ganzton zusammen

Man nehme die Proportionen von kleiner Terz und kleinem Ganzton, multipliziere [senkrecht] 6 mit 10 und erhält 60; 5 mal 9 ergibt 45, die man darunter schreibt, wie gezeigt. Wenn man nun diese Zahlen durch den gemeinsamen Teiler 15 teilt, ergibt das 4 und 3, die Proportio sesquitertia, aus der die Quarte besteht, wie dies auch die Noten zeigen.

<108> Rechnung:

	6	5	große Terz
	10	9	großer Ganzton
	60	45	Quarte
15			[Teiler]
	4	3	Quarte



Es muss dennoch verwundern, dass dieselbe Proportion entsteht, wenn man die große Terz und den großen Halbton miteinander vereinigt, wie folgt: Man nehme die Proportionen der großen Terz und des großen Halbtons in den kleinsten Werten, addiere sie wie eben, teile durch den gemeinsamen Teiler 20 und erhält wie vorher 4 und 3, die Proportio sesquitertia, aus der die Quarte besteht.

Proposition XIII

Rechnung für die Herleitung der Quarte aus der großen Terz und dem großen Halbton

5	4	große Terz
16	15	großer Halbton
80	60	Quarte in größeren bzw. zusammengesetzten Werten
20		[Teiler]
4	3	Quarte in minimalen Werten



Daraus wird klar, dass einige Intervalle, welche die modernen Musiker in ihren [mehrstimmigen] Kompositionen [concentus] ständig verwenden, nicht vollkommen und richtig, sondern falsch sind. Denn sie sind gegenüber den richtigen um ein Komma zu groß und bestehen aus zwei großen Ganztönen und einem großen Halbton. So drücken sie falsche Quartan aus, wie folgende:



Proposition XIV

Die Quinte wird aus der großen und der kleinen Terz gebildet

Man nehme die Proportionen der großen und der kleinen Terz in ihren kleinsten Werten, multipliziere sie und erhält so 30 und 20. Geteilt durch den gemeinsamen Teiler 10 ergibt das 3 und 2, also die Proportio sesquialtera, aus der die richtige Quinte besteht.

<109> Rechnung: Die Herleitung der Quinte oder Diapente

5	4	große Terz
6	5	kleine Terz
30	20	Quinte in zusammengesetzten Werten
10		[Teiler]
3	2	Quinte in minimalen Werten



Proposition XV

*Dieselbe Quinte wird aus der Quarte und dem großen Ganzton gebildet,
wie es aus der Rechnung folgt:*

	4	3	Quarte
	9	8	großer Ganzton
	36	24	Quinte in zusammengesetzten Werten
12			[Teiler]
	3	2	Quinte in minimalen Werten

Daraus wird ersichtlich, dass die Quinten, wie sie in den folgenden Noten ausgedrückt sind, falsche sind, also Dissonanzen, und dem allgemeinen Urteil der Praktiker entgegenstehen. Sie bestehen nämlich in der Proportio supertripartiens 27 [30 : 27], wie aus dem Beispiel A hervorgeht.

	4	3	Quarte
	10	9	kleiner Ganzton
	[30]	27	forma supertripartiens 27



Proposition XVI

Die Addition von Quarte und kleiner Terz ergibt das kleine Hexachord oder die kleine Sexte

Rechnung:

	4	3	Quarte
	6	5	kleine Terz
	24	15	kleine Sexte in größeren Zahlen
3			[Teiler]
	8	5	kleine Sexte in minimalen Zahlen



<110>

Proposition XVII

*Die Addition von verminderter Quinte und dem großen Ganzton
ergibt gleichfalls die kleine Sexte*

Rechnung:

64	45	verminderte Quinte
9	8	großer Ganzton
576	360	kleine Sexte in zusammengesetzten Werten
72		[Teiler]
8	5	kleine Sexte in minimalen Werten



Proposition XVIII

Die Addition von Quarte und großer Terz ergibt die große Sexte

Rechnung:

4	3	Quarte
5	4	große Terz
20	12	große Sexte in größeren Werten
4		[Teiler]
5	3	große Sexte in minimalen Werten



Proposition XIX

Die Addition von Quinte und kleinem Ganzton ergibt gleichfalls die große Sexte

Rechnung:

3	2	Quinte
10	9	kleiner Ganzton
30	18	große Sexte in zusammengesetzten Werten
6		[Teiler]
5	3	große Sexte in minimalen Werten



Proposition XX

Die Addition des kleinen Halbtons und der kleinen Sexte ergibt gleichfalls die große Sexte

Rechnung:

8	5	kleine Sexte
	x	
25	24	kleiner Halbton
200	124	große Sexte in zusammengesetzten Werten
40		[Teiler]
5	3	große Sexte in minimalen Werten



<111>

Proposition XXI

Die Zusammensetzung der Septime

Quinte und kleine Terz addiert, ergeben die kleine Septime

Rechnung:

3	2	Quinte
6	5	kleine Terz
18	10	kleine Septime in größeren Werten
2		[Teiler]
9	5	kleine Septime in minimalen Werten



Proposition XXII

Die Addition der großen Sexte und des großen Halbtons ergibt das kleine Heptachord

Rechnung:

5	3	große Sexte
16	15	großer Halbton
80	45	kleines Heptachord in größeren Werten
5		[Teiler]
16	9	kleines Heptachord in minimalen Werten

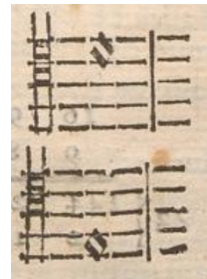
Daraus wird klar, dass das [kleine] Heptachord der Alten die kleine Septime um ein Komma überragt.

Proposition XXIII

Die Addition zweier Quarten ergibt gleichfalls das kleine Heptachord

Rechnung:

4	3	Quarte
4	3	Quarte
16	9	kleines Heptachord



Proposition XXIV

Die Addition von Quinte und großer Terz ergibt die große Septime

Rechnung:

3	2	Quinte
5	4	große Terz
15	8	große Septime



<112>

Proposition XXV

Aus der Addition von großer Sexte und dem kleinen Ganzton entsteht die Proportio super23partiens 27

Rechnung:

5	3	große Sexte
10	9	großer Ganzton
50	27	Proportio super23partiens 27, welche die große Septime um ein Komma überragt



Proposition XXVI

Die Zusammensetzung der Oktave

Die Addition von Quinte und Quarte ergibt die Oktave

2	3	2	Quinte oder Diapente
	4	3	Quarte oder Diatessaron
	12	6	Oktave in größeren Werten [Teiler]
	2	1	Oktave in minimalen Werten

Proposition XXVII

*Durch Addition von kleinem Heptachord und großem Ganzton
entsteht gleichfalls die Oktave*

72	16	9	kleines Heptachord
	9	8	großer Ganzton
	144	72	Oktave in zusammengesetzten Werten [Teiler]
	2	1	Oktave in minimalen Werten

Hieraus geht ohne Zweifel hervor, wie Konsonanzen und Dissonanzen zusammengesetzt und geteilt werden können, mit welchen Überstand sie sich überragen und überragt werden. Deutlich wird auch, dass es keine Konsonanz gibt, die man nicht in dissonante Teile aufspalten kann, die zusammengefügt die Konsonanz wiederherstellen. Zum Beispiel wird die Oktave [Diapason = »durch alle«] von den Griechen nicht nur deswegen so genannt, weil sie alle Konsonanzen umfasst, sondern weil sie auch alle Dissonanzen enthält. Das wird daraus deutlich, dass einer, der die Oktave in zwei Dissonanzen aufteilt, auf der einen Seite die verminderte Quinte, auf der anderen den Tritonus findet. Deren Proportionen sind 45 : 64 bzw. 32 : 45, die addiert genau die Oktave ergeben, wie es die Rechnung zeigt:

<113> Beispiel:

2	45	64	verminderte Quinte
	32	45	Tritonus
	1.440	2.880	in größeren Werten [Teiler]
	1	2	Oktave

Eine Oktave kann ebenfalls in eine große Septime mit der Proportion 5 : 9 und in einen kleinen Ganzton mit der Proportion 9 : 10 geteilt werden. Man beachte zweitens, dass der große Ganzton, um den die Quinte größer ist als die Quarte, bei den Griechen gewöhnlich die Tetrachorde trennte, wie es später noch gezeigt wird, und nur von diesem berichten

die Pythagoreer. Auch wenn der große Halbton nichts anderes ist als der Überstand der Quarte über die große Terz, ist er doch für die Musik äußerst notwendig. Mit seiner Hilfe nämlich gewinnen die verschiedenen Formen der Quarte, Quinte und Oktave ihre Stabilität.

Drei Arten des Halbtons

Der **kleine Ganzton** wird aus zwei Halbtönen gebildet, dem großen und dem kleinen. Er dient zur Bildung der großen Terz, und im diatonischen Tongeschlecht benötigt man keinen anderen als den großen und den kleinen Ganzton. Da aus ihnen die Quarte besteht, genügt dieser zur Kenntnis der ganzen diatonischen Musik. Einige setzen zur besseren Erklärung der Sache drei Halbtöne an: den großen, den mittleren und den kleinen. Der große ist mit der Proportion 25 : 27 ein Komma größer als der mittlere. Den zweiten oder mittleren mit der Proportion 128 : 135 überragt der große um ein Komma.

Das pythagoreische Limma

Den dritten, der nur ganz wenig kleiner ist als der mittlere und der die Differenz zwischen Quarte und zwei großen Ganztönen darstellt, nennt man auch das »pythagoreische Limma« mit der Proportion 243 : 256. Er wurde dazu verwendet, die zwei großen Ganztöne zur Quarte zu vervollständigen, und wird vom großen Halbton um ein Komma überragt, wobei andere auch andere Unterteilungen vornehmen.

Da wir aber diese Dinge anderswo behandeln, halte ich es für überflüssig, auf eine verwickelte Angelegenheit Zeit zu verschwenden, die nichts zu dem beiträgt, was wir uns vorgenommen haben. Also zurück zu unserem Vorhaben.

Der **große Ganzton** macht, zur Quarte hinzugegeben, eine Quinte, ist also der Überstand der Quinte über die Quarte.

Der **kleine Ganzton** ist der Überstand der Quarte über die kleine Terz.

Der Halbton, der in der Mitte zwischen dem großen und dem kleinen liegt, verhält sich wie 135 zu 128. Um ihn überragt der große Ganz- den großen Halbton. Den kleinen Halbton überragt er um ein Komma. Er tritt beim Tritonus auf, der ja die Bewegung von F *fa ut* zu $\sharp$ *mi* ist, weil dieser eine Quarte von F *fa ut* zu B *fa* um diesen mittleren Halbton übersteigt.

Damit man die Unterschiede zwischen diesen kleinsten Intervallen erkennen kann, haben wir hier eine Tabelle hinzugesetzt, in der man alles, was bisher gesagt wurde, deutlich wie in einer Synopse anschauen kann.

Um den Überstand herauszufinden, um den zwei Intervalle sich überragen, muss man ihre Proportionszahlen kreuzweise multiplizieren, und man erhält den Überstand, um den sie sich überragen, in den Zahlen, die jeweils darunter geschrieben sind. Zum Beispiel ergeben der große Ganzton 9 : 8 und der kleine Ganzton 9 : 10 miteinander über Kreuz multipliziert 80 : 81. Es ist also ein Komma, durch das sie voneinander abweichen. So ist auch bei den anderen Beispielen zu verfahren.

Intervalia Minora.

Semit.	Ton. ma. Sem. min.	Ton. min. Sem. mai.	Sem. mai. Diesis.
8 9 Sem. X min.	8 24 X	9 15 X	15 125 X
maius 9 10	9 25	10 16	16 128
Exc. 80 81 com.	25 27 excels.	24 25 excels.	24 25
Ton. mai. Sem. min.	Ton. maior Diesis.	Ton. min. Diesis.	Sem. maius Com.
8 15 X	8 125 X	9 125 X	15 80 X
9 16	9 128	10 128	16 81
Exc. 128 135 excels.	1024 1025 exc.	576 625	223 256
Ton. ma. Lim. Pyth.	Sonus ma. Comma.	Sem. ma. Sem. min.	Sem. min. Diesis.
8 243 X	8 80 X	9 24 X	24 125 X
9 256	9 81	10 25	25 128
Exc. 2048 2187 exc.	9 10	125 128	3072 3125

Kapitel VIII

Der Ursprung des [Ton-]Systems und der Tetrachorde

Damit wir in unserem musikalischen Werk vorzüglich Ordnung halten, erscheint es mir richtig, hier zuerst zu erklären, was die Tongeschlechter [genera], die Systeme [systemata] und die Tetrachorde [tetrachorda] sind und wie sie von den Musikern verstanden werden, damit der Leser im Folgenden, wo diese Begriffe häufig erwähnt werden, nicht gebremst wird.

Zuerst sollte man wissen, dass die Musik der Alten so einfach gewesen ist – wie Nikomachos gemäß Boethius sagt –, dass sie insgesamt nur vier Saiten brauchte, was bis Orpheus andauerte. Einen solchen Apparat aus vier Saiten nannten sie »Tetrachord«. Daraus wurden nach und nach ein Pentachord, Hexachord, Heptachord, Oktochord, Enneachord, Dekachord, Hendekachord, Dodekachord, bis er schließlich auf vierzehn Saiten anwuchs. Nachdem man dort noch die fünfzehnte Saite hinzugefügt hatte, die man auch προσλαμβανομένη [proslambanoménê], also »Hinzugenommene«, nannte, füllte es die Doppeloktave aus. Diese Einfachheit der Alten gefiel der Nachwelt so sehr, dass man bis heute nach alter Art die Saiten in Tetrachorde aufteilt. Schließlich sind Tetrachorde nichts anderes als vier Saiten, die sich über vier Klänge oder Stimmen im Ambitus einer Quarte erstrecken. Fünf davon werden nach griechischer Ordnung auf die Tonleiter gesetzt. Sie stehen in der Proportio sesquialtera stehen und haben die Konsonanz der Quarte *mi-la*.

Guido von Arezzo erfand die Namen der Musiknoten.

Um die Musik gepflegter und für das Singen passender zu machen, erfand Guido von Arezzo, der hervorragendste Musiker seiner Zeit, bestimmte Zeichen für die Töne [voces], die er teils als Figuren [figurae] darstellte (die wir heute Noten [Notae] nennen), teils als Silbennamen. Davon sind noch sechs in Gebrauch: *ut, re, mi, fa, sol, la*. Er hat sie von den Anfangsilben eines Kirchenhymnus genommen, wie folgt:

Ut queant laxis.

Resonare fibris.

Mira gestorum.

Famuli tuorum.

Solve polluti.

Labij reatum.

O Pater alme¹⁶

<115> Man nennt sie mit einem geläufigeren Begriff »Zeichen« [signa], indem man das Zeichen für die bezeichnete Sache verwendet. Die Positionen dieser Töne nennt man »Claves« [Schlüssel], sie werden durch Linie und Zwischenraum für den Sänger unterscheidbar und für das Auge durch gleiche parallele Linien mit gleichem Abstand erkennbar, auch wenn die Töne nicht immer den gleichen Abstand voneinander haben. Was die Alten »Stränge« [nervos] oder »Saiten« [chordas] nannten, nennt Guido »Stimmen« oder »Töne« [voces]. Diese benutzte er anstelle der Saiten, indem er sie wie eine Leiter [scala] gemäß der alten griechischen Verteilung der Tetrachorde anordnete, worin ihm dann die gesamte Nachwelt folgte. Und so ging er vor:

Auf der untersten Linie setzte er den Ton *ut* und schrieb davor den dritten griechischen Buchstaben Γ, um zu zeigen, dass er die Musik aus den griechischen Denkmälern wiederhergestellt hatte. In den Zwischenraum über der ersten Linie setzte er den Ton *re* und schrieb davor den Buchstaben Α, auf die zweite Linie den Ton *mi* mit dem Buchstaben Β davor, den einige zur Unterscheidung vom runden Β so schreiben: Ϟ. Und so ordnete er die restlichen Töne der Reihe nach auf der Leiter an, wie aus der Darstellung ersichtlich wird.

¹⁶ Übersetzung laut <<https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes-Hymnus>>: »Auf dass die Schüler mit lockeren Stimmbändern mögen zum Klingen bringen können die Wunder deiner Taten, löse die Schuld der befleckten Lippe«.

Darstellung der allgemeinen Skala Guidos gemäß der Art, wie es die alten Griechen im diatonischen Tongeschlecht gemacht haben

Stand: 3. Feb. 2016

Erklärung der Darstellung

In der ersten Spalte stehen die Bezeichnungen für die Saiten und auch für die Tetrachorde, in der zweiten die dazu gehörenden Proportionszahlen. Die dritte Spalte enthält die Tonstufen [claves] nach Guido, die den Saiten [nervi] entsprechen, die vierte die Bezeichnungen der Intervalle, die fünfte die verschiedene Zuordnung der Tonnamen [vocum varia dispositio].

Es gibt von Natur aus sieben verschiedene Tonstufen [claves], die mit ebenso vielen Buchstaben bezeichnet werden, nämlich a, b, c, d, e, f, g. Durch Wiederholung werden es aber zwanzig. Zur Unterscheidung werden die ersten sieben nach dem Γ von den Musikern mit Großbuchstaben geschrieben, die folgenden dann mit Kleinbuchstaben. Ferner gibt es ganz oben fünf Doppelbuchstaben. Und deshalb nennen wir A das große oder tiefe, a das kleine oder hohe und Aa das verdoppelte (ebenso bei allen anderen Tonstufen). Der Abstand zwischen den Tonstufen ist höchst beachtenswert. Denn so wie eine Tonstufe von der nächsten eine Sekunde entfernt ist, von der dritten eine Terz, von der vierten eine Quarte, und so weiter, so ist im Allgemeinen ein Buchstabe vom nächsten der gleichen Art eine Oktave entfernt – zum Beispiel Γ *ut* von G *sol re ut* und A von a *la mi re*. Dasselbe kann man für die übrigen Buchstaben schließen. Für jede Oktave gilt nämlich dasselbe. Was aber für die Töne gilt, das gilt auch für die Natur des Gesangs. Wenn also Töne in G *sol re* stehen, können sie korrekt auch in Γ *ut* gesungen werden. Wenn sie in [a] *la mi re* stehen, kann man auch A *re* singen, wenn sie in B *fa mi* stehen auch in b *mi*, und gleiches gilt für die obersten Töne. Man hätte diese Aufstellung der Tonstufen bis ins Unendliche fortsetzen können, wenn man die Regeln beachtet, die der schon erwähnten Gesetzmäßigkeit innewohnen. Dennoch war es nötig, irgendwo einen Anfang und ein Ende zu machen, so dass zu berücksichtigen ist, dass eine Note, die man unter das Γ *ut* setzen würde, zur achten Tonstufe gehören müsste. Wie nämlich unterhalb von G *sol re ut* das F *fa ut* steht, so wäre unter Γ *ut* auch das F *fa ut* zu setzen, auch wenn eine menschliche Stimme diese Grenzen nicht überschreiten kann. Aber machen wir uns an die eigentliche Erklärung des Systems.

Fünf Tetrachorde sind im gesamten System der Leiter angeordnet. Das erste Tetrachord τῶν ὑπατῶν [Hypaton], das bedeutet »der ersten Saiten«, beginnt mit dem Ton προσλαμβανομένην [Proslambanomenên] und enthält vier Saiten. Sie heißen ὑπατή ὑπατῶν [Hypate hypaton (der zugrundeliegenden Töne)], παρυπάτη ὑπατῶν [Parhypate hypaton], λυχανὸς ὑπατῶν [Lichanos hypaton] und ὑπατή μεσῶν [Hypate mesôn]. Ihnen entsprechen auf Guidos Tonleiter die Töne ♭, C, D, E mit den Tonsilben *mi*, *fa*, *sol*, *la*, wie folgt.

I. Das Tetrachord ὑπατῶν [Hypaton] oder das der ersten Saiten

1. Die erste Saite ὑπατὴ ὑπατῶν oder die Hauptseite der ersten Saiten. Ihr entspricht der Tonbuchstabe η und die Tonsilbe *mi*.
2. die zweite Saite παρυπάτη ὑπατῶν, d. h. die der Hauptsaiten nachfolgende, ihr entspricht
der Tonbuchstabe C, die Tonsilbe *fa*.
3. die dritte Saite λυχανὸς ὑπατῶν, d. h. die teilende der ersten Saiten. Ihr entspricht der Buchstabe D, die Tonsilben *sol, re*.
4. die vierte Saite ὑπατὴ μεσῶν d.h. der Anfang der mittleren [Saiten]. Ihr entspricht der Tonbuchstabe E, die Tonsilbe *la*.

II. Tetrachord τῶν μεσῶν [ton meson], d. h. der mittleren, mit den vorigen Saiten verbundenen Saiten, denn sie erfreuen sich einer gemeinsamen Saite

1. Die erste Saite ὑπατὴ μεσῶν, d. h. die erste der Mittleren. Ihr entspricht der Tonbuchstabe E, die Tonsilben *la, mi*.
2. die zweite παρυπάτη μεσῶν, die der ersten am nächsten gelegene Saite Parhypatos Meson, ihr entspricht
der Tonbuchstabe F, die Tonsilben *fa, ut*.
3. die dritte λυχανὸς μεσῶν, welche die mittleren teilt. Ihr entspricht der Tonbuchstabe G, die Tonsilben *sol, re, ut*.
4. die vierte μεσὴ, die man auch Mitte nennt. Ihr entspricht der Tonbuchstabe a, die Tonsilben *la, mi, re*.

<118>

III. Tetrachord τῶν συνημμένων, das der verbundenen, hat diese vier Saiten

1. Die erste Saite wird μεσὴ [Mese], das heißt die Mittlere, genannt. Ihr entspricht auf der Skala
der Tonbuchstabe a, die Tonsilben *la, mi, re*.
2. Die zweite Saite wird τρίτη συνημμένων [Trítê synemménon] genannt, das heißt die dritte der verbundenen, ihr entspricht
der Tonbuchstabe b, die Tonsilbe *fa*.
3. die dritte παρανήτη συνημμένων [Paranète synemménon], das heißt die, welche der ersten verbundenen am nächsten ist. Ihr entspricht der Tonbuchstabe c, die Tonsilben *sol, fa, ut*.
4. die vierte νήτη συνημμένων [Nete synemménon], das heißt die äußerste der verbundenen. Ihr entspricht der Tonbuchstabe d, die Tonsilben *la, sol, re*.

IV. Tetrachord τῶν διαzeugμένων [Diezeugménôn], d. h. der getrennten [Saiten], weil sie mit dem vorhergehenden nicht verbunden sind, sondern von der Mese einen Ganzton Abstand hat

1. Die erste Saite παραμέση [Paramese], d. h. die den mittleren nächste, ihr entspricht der Tonbuchstabe b, die Tonsilbe *mi*.
2. die zweite Saite τρίτη διεzeugμένων [Trite diezeugménôn], d. h. die dritte der getrennten. Ihr entspricht der Tonbuchstabe c, die Tonsilben *sol, fa, re*.
3. die dritte Saite παρανήτη διεzeugμένων [Paranété diezeugménôn], d. h. die, welche der Nete von den getrennten Saiten am nächsten ist. Ihr entspricht der Tonbuchstabe d, die Tonsilben *la, sol, re*.
4. die vierte Saite νήτη διεzeugμένων [Nete diezeugménôn], d. h. die letzte der getrennten. Ihr entspricht der Tonbuchstabe e, die Tonsilben *la, mi*.

V. Tetrachord τῶν ὑπερβολαιῶν [ton Hyperbolaion], d. h. der überragenden [excellentes] Saiten, das eine gemeinsame Saite mit dem vorausgehenden Tetrachord hat

1. Die erste Saite νήτη διεzeugμένων [Nete diezeugménôn], d. h. die letzte der getrennten. Wird bezeichnet mit dem Tonbuchstaben e, den Tonsilben *la, mi*.
2. die zweite τρίτη ὑπερβολαιῶν [Trite hyperbolaion], d. h. die dritte der überragenden. Wird bezeichnet mit dem Tonbuchstaben f, den Tonsilben *fa, ut*.
3. die dritte παρανήτη ὑπερβολαιῶν [Paranete hyperbolaion], d. h. die welche der [Nete] der Höchsten am nächsten ist. Mit dem Tonbuchstaben g, den Tonsilben *sol, re, ut*.
4. die vierte νήτη ὑπερβολαιῶν [Nete hyperbolaion], d. h. die höchste oder die letzte der überragenden, mit dem Tonbuchstaben Aa, den Tonsilben *la, mi, re*.

Dies sind die fünf Tetrachorde der alten Musiker. Um sie zu ordnen, erfand Guido einfallsreich die Skala und seine »musikalische Hand«. In dieser sieht man das Tetrachord συνημμένων, das verbundene, so angeordnet, dass von der Saite μεσή, mit der das Tetrachord μεσῶν endet, zugleich das Tetrachord συνημμένων, das heißt das »der verbundenen« [Saiten], beginnt: so dass die Saite μεσή, oder »die mittlere«, die letzte des zweiten Tetrachords ist und zugleich die erste des dritten, des Tetrachords der verbundenen. Das Tetrachord διεzeugμένων, oder das »der getrennten Saiten«, wird so genannt,

weil es von der Mese oder vom letzten Ton des zweiten Tetrachords durch einen Ganzton getrennt ist. Hier könnte man fragen, weshalb Guido unter den untersten der Unteren [Hypate hypaton] noch einen ganzen Ton gesetzt hat.

Darauf antworte ich, dass dies aus folgenden Gründen geschah: Weil die zwei unteren Tetrachorde ὑπατῶν καὶ μεσῶν [Hypaton und Meson] zusammen keine ganze Oktave gebildet hätten, wurde ihnen an der Wurzel noch ein Ton angefügt, wie Paramese zur Mese. Das so nach allen Seiten vervollständigte Oktavensystem mit den zwei zugleich verbundenen Tetrachorden ergibt vom Proslambanomenos bis zur Nete hyperbolaion eine Doppeloktave und ist das größte System in der Musik [maximum in Musica systema]. Das alles wird klar und deutlich an den Zahlen, die neben jeder Saite stehen. Dort sieht man, dass für Proslambanomenos und Mese die Zahlen 9.216 und 4.608 aufgeschrieben sind, also eine doppelte Proportion, die eine perfekte Oktave bilden. Da vom Proslambanomenos bis zur Nete hyperbolaion eine Doppeloktave reicht, müssen notwendigerweise für Proslambanomenos und Nete hyperbolaion die Zahlen 9.216 und 2.304 aufgeschrieben werden. Das ist die Proportio quadrupla. So bilden ferner die Zahlen 9.216 für Proslambanomenos und 6.144 für Hypate meson die Proportio sesquialtera [3 : 2], die die Quinte bezeichnet. Die Zahl 6.144 für Hypate meson im Verhältnis zu 4.608 für Mese bildet die Proportio sesquitercia [4 : 3] und damit die Quarte. Genauso zeigen die anderen Zahlen die Proportionen der einzelnen Intervalle an, nämlich Ganztöne und Halbtöne. Weil das Schema des universellen Systems dies alles dem Leser vor Augen führt, möchten wir ihn darauf verweisen. <119> Die Intervallproportionen sind nicht in ihren kleinsten Werten und Wurzelzahlen, sondern in sehr großen aufgeführt, damit Guido leichter die kleinen Teile eines Tones wie zum Beispiel Koma, Schisma und Diaschisma angeben konnte. So sieht man, dass für Mese 4.608 zur Triten synemmenon 4.374 aufgeschrieben ist, also die Proportion der Diësis oder des kleinen Halbtons, von da zur Zahl 4.096 der Paramese die Proportion der Apotome, das heißt des Kommas mit Diësis, und so geht es weiter. Wer es prüft, dem wird das System klar werden.

Die drei Tongeschlechter [De tribus modulandi generibus]

Drei Tongeschlechter [modulandi genus] werden von den Autoritäten angegeben. Sie umfassen alles, was es in der Welt der Musik gibt: nämlich das diatonische, chromatische und enharmonische Geschlecht. Diatonisch ist das, welches über zwei Ganz- und einen kleinen Halbton, das bedeutet also: διατόνως [diatonisch], voranschreitet. Das chromatische – der Name leitet sich von »Farbe« [chroma] her, weil die Alten es von dem diatonischen durch unterschiedliche Färbung absetzten – geht über Halbton, Halbton und kleine Terz voran. Das dritte ist das enharmonische, das über Diësis, Diësis und große Terz voranschreitet. Da wir diese drei Tongeschlechter im Folgenden ausführlich bedenken werden, erscheint es mir richtig, anstelle einer voluminösen Abhandlung hier bloß noch das Schema der hier erörterten Angelegenheit abzubilden.

Schema des diatonisch-chromatisch-enharmonischen Tetrachords

	6144	6144	6144
E	Hypate meson	Hypate meson	Hypate meson
	6912 6144		
D	Lychanos hypat.	7296 Lychanos hypat.	
C	7776 Parhypate hypat.	7776 Parhypate hypat.	7776 Lychanos hypatō
b	Hypate hypaton	Hypate hypaton	Hypate hypaton
	8192 DIATONICVM	8192 Chromaticum	8192. Enarmonicum

<120>

Kapitel IX

Der charakteristisch harmonische bzw.
in Ziffern ausgedrückte [Zyphratus] Algorithmus
und zunächst etwas über die numerische Anordnung
der Töne auf beiden Skalen

Da die Musik, wie wir im ersten [sic] Buch gezeigt haben, eine der Arithmetik untergeordnete Wissenschaft ist, muss sie auch dieselben Regeln wie diese beachten. Wiewohl viele dies behandelt haben wie zum Beispiel Jordanus, Boethius, Stifel und andere, haben wir es dennoch unternommen, indem wir in deren Fußstapfen treten, hier die Musik mit einer umfangreicheren, neueren Methode zu behandeln, die für den Gebrauch besser geeignet ist. Damit wir uns aber bei dieser ziemlich schwierigen Beschäftigung nicht verirren, wollen wir in der üblichen Tonleiter, die zudem noch zweifach in *Dur* und *Moll* oder, was dasselbe ist, *wirklich* [vera] und *erfunden* [ficta] geteilt wird, den Bau unserer musikalischen Arithmetik vorstellen. Weil einem gewöhnlich bei der Behandlung dieses Gegenstandes überall

irrationale Zahlen begegnen, werden wir diese Zahlen mit dem allgemein üblichen Wurzelzeichen der cossischen Zahlen versehen, damit nichts angeführt werde, was den Leser sofort vor den Kopf stoßen könnte. Doch bevor wir weitergehen, sollten wir zuerst die Systeme oder die Skalen behandeln, damit wir das Folgende fliegenden Fußes durchlaufen können.

Zuerst legen wir zugrunde, dass es zwei Skalen gibt: eine in Dur und eine in Moll, die einige auch die wirkliche [vera] und die erfundene [ficta] nennen. Mit der Ordnung der Töne auf beiden wollen wir uns nun beschäftigen. Wer immer die musikalische Progression nach der erstgenannten Skala ordnen will, der soll den Anfang seiner Zählung bei der doppelten [Proportion], der ersten und einfachsten aller Konsonanzen, machen. Sie ist, wie oben schon gezeigt, die erste Proportion, wenn man ihren Ursprung aus den Zahlen betrachtet. Ihre Zahlenwerte sind die kleinsten unter den Zahlen: Das Zweifache in Bezug auf die Einheit ergibt nämlich die Proportio dupla. Damit hat man das Intervall der Oktave gefunden, wie man hier sieht:

$$\begin{array}{rcl} G & \text{Sol, re, ut} & 1 \\ & & \} \text{ Oktave.} \\ \Gamma & \text{ut} & 2 \end{array}$$

Die Oktave enthält alle Konsonanzen und Dissonanzen in sich.

Dieses Intervall ist das vollkommenste der Skala, da es alle übrigen in sich enthält und einfaltet [omnia reliqua intervalla complicans]. Was immer man außer diesem Intervall auf der Skala finden mag, muss als Wiederholung dessen gelten, was schon in ihr angelegt war. Auf diese Weise entsprechen die menschlichen Stimmen und die Musikinstrumente, wenn sie für das Urteil der Ohren angenehm sind, der Natur der Zahlen.

Verdoppelt man beide Zahlenwerte, so entsteht in der Mitte der verdoppelten Zahlen die Dreiheit, welche die Oktave in Quinte und Quarte teilt.

Quinte und Quarte sind die größten der übrigen Konsonanzen.

Diese beiden Konsonanzen geben das Maß für alle übrigen Intervalle an, die man auf der Skala betrachten kann. Es ist schon verwunderlich, dass die von ihrer Form nach kleinste Proportion [die Oktave] in zwei Proportionen geteilt wird, die ihrer Form nach die größten und, was die Skala angeht, die hauptsächlichen Teile bei der Teilung des vollkommensten Intervalls sind. Damit wir aber den wunderbaren Vorgang genauer betrachten können, hielt ich es für richtig, alles der Reihe nach vorzuführen.

Proposition I

Wie man die Oktave in Quinte und Quarte teilt

Da die Oktave in der Proportio dupla besteht, muss man die kleinsten Zahlen dieser Proportion, also 1 und 2, verdoppeln. Man erhält 2 und 4. Die Drei in der Mitte ergibt das Gesuchte. Die Rechnung sieht so aus:

G	2	
C	3	} Quinte.
Γ	4	} Quarte.

An 2 zu 3 erkennt man die Proportio sesquialtera, das ist die Quinte, an 3 zu 4 die Proportio sesquitercia, also die Quarte. Aus diesen Proportionen kann man alle übrigen Intervalle der Skala ohne große Mühe herausfinden, und zwar auf die folgende Weise.

Proposition II

Wie man den Ort der Quarte über C sol fa ut auf der Tonleiter findet

Zuerst multipliziere man die ungerade Zahl der vorausgegangenen Aufstellung, also die 3 – die Mitte zwischen 2 und 4 – mit sich selbst und erhält 9. Dem entspricht auf der Skala das F. Das ist die gesuchte Quarte über dem C. Die übrigen Zahlen, die den Tonstufen Γ, C und G entsprechen, findet man so: Man multipliziert die Zahlen der obigen Aufstellung miteinander, zum Beispiel die Zahlen, die oben neben G und Γ stehen, also 2 und 4, und erhält 8. Die Rechnung für G: Neben C und Γ stehen die Zahlen 3 und 4, multipliziert ergeben sie 12. Schließlich für die Tonstufe C: Γ 4 mit sich selbst multipliziert, ergibt 16, so muss 16 neben Γ geschrieben werden. Die Rechnung:

G	8	} Ganzton
F	9	} Quarte.
C	12	} Quarte
Γ	16	

Proposition III

Wie man den Ort der Quinte unter F 9, dem eben gefundenen Ton, findet

3 : 2 – Proportio sesquialtera

Möchte man die Quinte unter F finden, so muss man so vorgehen: Man multipliziere die 3, die größere Zahl der Proportio sesquialtera, mit 9, der gerade eben gefundenen ungeraden

Zahl, die beim Ton F steht, und erhält 27, was dem B [B molle] entspricht. Um die Proportionen der anderen Töne zu erhalten, gehe man so vor: Man multipliziere jede Zahl aus der obigen Aufstellung mit 2 (mit Ausnahme der 9, für die ja schon die 27 gefunden wurde), d. h. G 8, F 9, C 12 und Γ 16, alle mit 2, also dem kleineren Wert der Proportio sesquialtera, und erhält die folgende Zahlenverteilung:

G	16	} Ganzton
F	18	} Quarte.
C	24	} Ganzton
B [molle]	27	} [pythagoreische] kleine Terz ¹⁷
Γ	32	

<122>

Proposition IV

Wie man den Tonbuchstaben D über Γ ut oder, was dasselbe ist, die Quinte über Γ ut auf der Skala findet

2 : 3 – Proportio sesquialtera

Man multipliziert die 32, die neben Γ steht, mit 2, dem kleineren Wert der Proportio sesquialtera, und erhält 64. Das entspricht der Tonstufe D, der gesuchten Quinte. Um die Proportionen der anderen Töne zu erhalten, multipliziert man die einzelnen Werte aus der vorangegangenen Aufstellung (Ausnahme: 27) mit dem größeren Wert der Proportio sesquialtera, also der 3, und erhält folgende Werte für die Tonstufen:

G	48	} Ganzton.
F	54	} kleine Terz.
D	64	} Ganzton.
C	72	} Ganzton.
B fa	81	} kleine Terz.
Γ	96	

Proposition V

Wie man die Quarte unter dem eben gefundenen D benennt

4 : 3 – Quarte, sesquitercia

Der eben gefundene Tonbuchstabe war D mit der Zahl 64. Die Quarte darunter auf der Skala findet man so: Man multipliziert 64 mit 4, dem größeren Wert der Proportio sesquitercia, und erhält 256, die Zahl für die gesuchte Quarte, die dem Tonbuchstaben A entspricht. Die anderen Zahlen für die weiteren Tonstufen erhält man, wenn man die Zahlen für die Tonbuchstaben aus der vorhergehenden Aufstellung mit dem kleineren Wert

¹⁷ Gemeint ist eine pythagoreische kleine Terz, die 32:27 ist. Das Intervall wurde oben nicht eingeführt.

der sesquitertia, also 3, multipliziert. So ergibt $3 \times G$ 48 [der vorige Wert von G] für die Tonstufe G 144 und so weiter, wie in folgender Aufstellung:

G	144	} Ganzton.
F	162	} kleine Terz.
D	192	} Ganzton.
C	216	} Ganzton.
B fa	243	} kleiner Halbton.
A	256	} Ganzton
Γ	288	

Proposition VI

Wie man die Quinte über der eben gefundenen Tonstufe A auf der Skala benennt

2 : 3 – Quinte, sesquialtera

Die eben gefundene Tonstufe und Zahl war A 256. Wenn man die Quinte darüber erhalten will, multipliziert man den kleineren Wert der Proportio sesquialtera (2) mit 256 und erhält 512. Dem entspricht die Tonstufe E, die gesuchte Quinte über A. Die restlichen Zahlen für die einzelnen Töne erhält man, wenn man 3, den größeren Wert der Proportio sesquialtera, mit den anderen Zahlen der obigen <123> Aufstellung multipliziert, wie man in der Darstellung sieht. So multipliziert man also 3 mit 243, was im vorigen Schema dem B entsprach, und erhält das B für das nun folgende System. Danach nimmt man $3 \times C$ 216 und erhält C 648, $3 \times D$ 192 ergibt D 576 etc.

G	432	} Ganzton.
F	436	} Kleiner Halbton.
E	512	} Ganzton.
D	576	} Ganzton.
C	648	} Ganzton.
B	729	} Kleiner Halbton.
A	768	} Ganzton.
Γ	864	

Proposition VII

Wie man die Quarte unter dem eben gefundenen E benennt

4 : 3 – Quarte. sesquitertia

Die eben gefundene numerische Tonstufe war E 512. Man multipliziert also 4 mit 512, also den größeren Wert der Proportio sesquitertia mit der eben gefundenen Tonstufe, und erhält 2.048, was der gesuchten Quarte ♩ *mi* entspricht. Die Werte für die übrigen Tonstufen erhält man, wenn man die einzelnen Werte aus der vorhergehenden Aufstellung mit 3, dem kleineren Wert der angestrebten Proportion multipliziert, wie folgt:

G	1.296	} Ganzton.
F	1.458	} Kleiner Halbton.
E	1.536	} Ganzton.
D	1.728	} Ganzton.
C	1.944	} Kleiner Halbton.
b dur.	2.048	} Großer Halbton.
B fa	2.187	} [Kleiner] Halbton
A	2.304	} Ganzton.
Γ	2.592	

Hier hat man den »Diapason« oder die vollständige Oktave mit den einzelnen Tonstufen und Tetrachorden und damit die gesamte musikalische Progression. Man könnte das bis ins Unendliche ausdehnen, wenn man eine Oktave aus der anderen bilden würde, wie die Skala es zeigt. Dort sieht man, mit welcher wunderbaren Methode und Sorgfalt lediglich aus Quinte und Quarte mit Hilfe verschiedener Abstiege Ort und Stelle der einzelnen Töne gefunden werden können.

Wenn man die Haupttonstufen [claves capitales] austauscht, also zum Beispiel Hypate in Nete oder in solche mit Doppelbuchstaben, dann kann man noch, wenn man deren Zahlenwerte verdoppelt, die Oktave der hohen Töne bilden und aus dieser einen Oktavraum der allerersten Tonstufen, was lediglich die Verdopplung der Zahlenwerte braucht. Damit liegt dann die vollkommene Skala in ihrer Gesamtheit mit den eigentlichen, den kleinsten Zahlenwerten, vor, wie folgt.

<124>

Musikalische Tonleiter

gg	1.296	} Ganzton.
ff	1.458	} Kleiner Halbton.
ee	1.536	} Ganzton.
dd	1.728	} Ganzton.
cc	1.944	} Kleiner Halbton.
hh	2.048	} Großer Halbton.
bb	2.187	} Kleiner Halbton
aa	2.304	} Ganzton.
g	2.592	} Ganzton.
f	2.916	} Kleiner Halbton.
e	3.072	} Ganzton.
d	3.456	} Ganzton.
c	3.888	} Kleiner Halbton.
h	4.096	} Großer Halbton.
b	4.374	} Kleiner Halbton
a	4.608	} Ganzton.
G	5.184	} Ganzton.
F	5.832	} Kleiner Halbton.
E	6.144	} Ganzton.
D	6.912	} Ganzton.
C	7.776	} Kleiner Halbton.
H	8.192	} Ganzton.
A	9.216	} Ganzton.
Γ	10.368	

Will man unter das Γ *ut* hinabsteigen, so muss man auch bei den tiefen Tönen B molle verwenden,¹⁸ und zwar so, wie man b molle bei den Höheren und bb bei den Höchsten nimmt. Durch den Wegfall eines großen Halbtons wird der Tritonus abgemildert, weil ja nach der natürlichen Zahlenfolge und der Ordnung der Töne stets eine Oktave aus der anderen entsteht, wie schon gesagt wurde.

Probe dieser Skala

9 : 8 – der Ganzton

Will nun einer wissen, ob zwischen ee und dd, d. h. zwischen 1.536 und 1.728, wirklich ein Ganzton ist, muss er die kleinsten Werte dieser Proportion ansetzen, welche 8 : 9 lautet. Dann dividiert man die kleinere Zahl [der Proportion ee:dd] durch die kleinere Zahl [der Proportion des Ganztons] und die größere durch die größere [ebenso]. Kommt dann die gleiche Zahl heraus, weiß man, dass man einen richtigen Ausdruck des Ganztons hat. So ergibt 1.536 durch 8 und 1728 durch 9 geteilt jeweils 192, wie an der Rechnung klar wird:

$$1.536 : 8 = 192.$$

$$1.728 : 9 = 192.$$

<125> Wie man aber mit einer Division durch 8 und 9 den Ganzton überprüft, so teilt man auch die übrigen Intervalle durch die ihnen entsprechenden Zahlen und Proportionen, wie folgt:

Großer Halbton	durch	2.048 & 2.187
Kleiner Halbton	"	243 & 256
Kleine Terz	"	27 & 32
Große [pythagoreische] Terz	"	64 & 81
Quarte	"	3 & 4
Tritonus	"	512 & 729
verminderte Quinte	"	729 & 1024
Quinte	"	2 & 3
Halbton mit Quinte	"	81 & 128
Kleine Terz mit Quinte	"	128 & 243
Verminderte Oktave	"	2187 & 4096
Oktave	"	1 & 2

Das gesamte Verfahren führen wir dem Leser in folgender Darstellung in einer einzigen Synopse vor Augen.

¹⁸ Der Ton unter Γ *ut* wäre wieder ein F, das dann zum H im Tritonus stünde.

Intervallschema

diapa-	on	bb	2187	bb	semediapason siue			
	cum diapente	aa	2304	aa	semiditonus cum			
	ditonus	g	2592	g	semitonium cum			
		f	2916	f	semidia-			
		e	3072	e	diatella-			
		d	3456	d	ron			
		c	3888	c	semedi-			
		b qu.	4096	b	semitonium			
		b	4374	b	mi.			
					ron			
					pente			
					diapente			

In dieser Darstellung findet man von bb bis b die Oktave, von aa bis b die große Terz mit Quinte [große Septime], von g bis b der Ganzton mit Quinte [große Sexte], von f bis b die Quinte, von e bis b der Tritonus, von d bis b die große Terz, von c bis b schließlich der Ganzton. Auf der anderen Seite von ♭ [b quadratum] bis c der kleine Halbton, von ♭ bis d die kleine Terz, von ♭ bis e die Quarte, von ♭ bis f die vermindere Quinte, von ♭ bis g der Halbton mit Quinte, von ♭ bis aa die verminderte Terz mit Quinte, von ♭ bis bb endlich die verminderte Oktave. Man sieht also, wie schön das alles zusammenpasst, was in diesem Schema dargestellt ist.

<126>

Kapitel X

Die Folge der Skala der Musica ficta oder, wie man zu sagen pflegt, der Skala mit Akzidentien

Die Folge nach der Skala der Musica ficta ist dieselbe wie die der obigen natürlichen Skala [Musica vera]. Die Skala der natürlichen Musik verläuft nach den Tetrachorden auf dem Clavichord, wo immer zwei Ganztönen ein kleiner Halbton folgt. Damit kein Tritonus entsteht, setzt man den Ganzton in einen kleinen und einen großen Halbton unterschieden an, wie dies oft genug gesagt wurde. Das ist die musikalische Progression im eigentlichen Sinne.

Die Skala der Musica ficta hat im Ganzen auch dieselben Proportionen. Sie werden aber weiter unterteilt, und zwar so, dass kein Ganzton übrig bleibt, der nicht in einen kleinen und einen großen Halbton geteilt wird, wie man es in folgender Teilung einer Oktave ausgeführt sieht:

Die Oktave nach der Anordnung der Skala mit Akzidentien

gg	165.888	} Großer Halbton.
	177.147	} Kleiner Halbton.
ff	186.624	} Kleiner Halbton.
	196.608	} Großer Halbton.
ee	209.952	} Kleiner Halbton.
	221.184	} Großer Halbton.
dd	236.196	} Kleiner Halbton.
cc	248.832	} Kleiner Halbton.
hh	262.144	} Großer Halbton.
bb	279.936	} Kleiner Halbton.
aa	294.912	} Großer Halbton.
	314.928	} Kleiner Halbton.
g	331.776	

Nun könnte man leicht aus diesen allerhöchsten Tonstufen, die mit Doppelbuchstaben bezeichnet werden, oder vielmehr aus ihren Zahlenwerten, die gesamte Skala ergänzen, indem man nämlich die Zahlen verdoppelt, wie es oben angegeben ist. Diese Aufteilung der Oktave ist genauso bewerkstelligt wie die obige, nämlich mit Quinte und Quarte. Sie ist sogar aus jener obigen entstanden, indem man von der ungeraden Zahl, die B *fa* zugeordnet ist, eine Quarte nach oben geht, und so weiter. So muss es im Folgenden immer sein, dass man mit einer ungeraden Zahl beginnt, und man wird nur eine einzige ungerade Zahl haben. Ebenso geschieht es immer, dass man eine Quarte nach oben geht, nicht nach unten. Die Quinte hingegen geht man nach unten, nicht nach oben. Beachtet man diese Regel, kann man nicht fehlgehen.

Man sieht hier auch, weshalb Musiker *fa* bei Tonstufen singen, die gar nicht mit *fa* bezeichnet werden, und ebenso, warum *mi* bei einzelnen Tönen nicht zugelassen ist, wenngleich *fa* erlaubt ist.

In gleicher Weise erkennt man, weshalb die Musica ficta »erdacht« [ficta] genannt wird. Das darf man freilich nicht so verstehen, als ob eine richtige Musik einer gleichsam nur erdachten, die es gar nicht gibt, gegenüberstünde, sondern so, dass die künstlich erdachte Musik neben der allgemeinen Skala noch eine weitere Unterteilung der Oktave und eine andere Aufteilung der Skala benötigt. <127> Betrachtet man die Tonsilben oder Tonnamen, scheint sie deswegen eine Erfindung zu sein. Betrachtet man aber die Ordnung der Zahlen, sieht man: Sie ist eine wirkliche Sache und eine Kunst, die den musikalischen Regeln nicht widerspricht, wie es der Fall wäre, wenn sie eine erfundene, nicht existente Sache wäre.

Man erkennt auch an den Zahlenverhältnissen, dass der eine Ganzton nicht größer oder kleiner [durior aut mollior] als der andere ist und dass kein Intervall anders ist als ein anderes. Die Zahlenwerte zeigen vielmehr, dass alle gleichwertig sind, es sei denn, man beurteilt Härte [duritia] oder Weichheit [mollitia] anhand der Abschwächung der Töne. Die Zahlenverhältnisse geben aber Höhe und Tiefe an. So wie wir mithilfe des einen Zahlenverhältnisses zwischen langen und kurzen Tönen unterscheiden, so unterscheiden wir anhand eines weiteren laute und leise Töne, und ihre gesamte Bedeutung ergibt sich aus den Zahlenwerten. Es ist hinlänglich bekannt, dass die feineren Saiten der Kithara nicht nur höhere Töne als andere, dickere Saiten erzeugen, sondern auch viel schwächere. Den

Anlass zu dieser Abschweifung gab mir jene Unterscheidung der Musiker, durch welche sechs Tonsilben sie die Oktave in drei teilen, auf folgende Weise:



Sie nennen den hohen kleineren Halbton »Mollton« [vocem mollem], den tieferen »Durton« [vocem duram]. Wenn auch keine Bezeichnung eines Tons mit *la* einen Ton *fa* oder *ut* zulässt, gestattet sie doch *mi*. Ebenso lässt keine Bezeichnung *ut* die von *mi* oder *la* zu, wohl aber *fa*. In diesem Sinne meinen die Musiker, *la* sei ein »Durton«: deshalb, weil er eine gewisse Verwandtschaft zu *mi* habe, wie auch *ut* mit *fa* verwandt zu sein scheint. So nennen sie *sol* und *re* natürliche Töne: Sie scheuen nämlich weder die Nähe von *b* [durum] noch von *b* [molle], obwohl sich *sol* doch eher zu *b* [molle] hinneigt: denn wenn es auch nie mit dem Ton *mi* kombiniert werden darf, so doch mit *la*. So darf *re* nicht kombiniert werden mit dem Ton *fa*, jedoch mit *ut*. Man sieht hier gewiss, dass die Spekulation der Musiker nicht um die Zahlenverhältnisse kreist, sondern um die Bezeichnung der Töne der Skala durch Buchstabensilben.

*Ein anderer Verlauf, d. h. eine andere Oktavteilung
in Kommata und kleine Halbtöne nach Michael Stifel*

gg	42.467.328	} Komma
	43.046.721	
	45.349.632	
ff	47.775.744	} Kleiner Halbton.
	50.331.648	
	51.018.336	
dd	53.747.712	} Komma.
	56.623.104	
	57.395.628	
ee	60.466.176	} Kleiner Halbton.
	63.700.992	
	67.108.864	
b dur.	68.024.448	} Komma.
	71.663.616	
	75.497.472	
bb	76.527.504	} Kleiner Halbton.
	80.621.568	
	84.934.656	
aa		} Komma.
g		} Kleiner Halbton.

Auch diesen Verlauf aus Kommata und kleinen Halbtönen kann man durch die Verdopplung der einzelnen Zahlen bis zum Γ *ut* erweitern.

Was ist eine musikalische Recise?

Das Komma ist die Differenz, um die ein großer Halbton einen kleinen überragt. Also kann man auch einen Verlauf aus Recisen und Kommata machen. Es gibt dreierlei Recisen, die ersten, zweiten und die dritten. Die erste Recise ist die Differenz, um die der kleine Halbton größer ist als das Komma, nämlich:

$$\begin{array}{r} 134.217.728 \\ 129.140.163 \end{array}$$

Die zweite Recise ist die Differenz zwischen der ersten Recise und dem Komma, und zwar:

$$\begin{array}{r} 1.899.942.885.796.928 \\ 1.852.997.966.631.841 \end{array}$$

Die dritte Recise ist die Differenz, um die die zweite Recise größer ist als das Komma, und zwar:

$$\begin{array}{r} 996.117.255.708.699.787.264 \\ 984.759.092.384.792.212.881 \end{array}$$

Daraus wird klar, dass man auch noch andere musikalische Reihen ansetzen kann, nämlich solche aus Kommata und Halbtönen, aus Kommata und ersten Recisen, aus Kommata und zweiten Recisen und noch aus Kommata und dritten Recisen.

All diese Möglichkeiten beruhen auf ein und derselben Methode. Die Reihe aus Kommata und Halbtönen ergibt sich aus dem Verlauf aus kleinen und großen Halbtönen. Dann nimmt man den Anfang von der ungeraden Zahl und geht eine Quinte nach unten, wie man leicht erkennt. Man geht nie eine Quinte nach oben, es sei denn, man bildet eine Reihe aus Ganz- und Halbtönen, also wenn man die Tonleiter der Musica vera bildet. So geht man auch niemals eine Quarte abwärts, außer wenn diese [natürliche] Reihe von Ganz- und Halbtönen angestrebt wird. Ebenso beginnt man nie mit einer geraden Zahl, außer bei dieser Reihe aus Ganz- und Halbtönen. Insofern sollte klar ersichtlich sein, wann man abwärts und wann aufwärts gehen muss, um diese Operationen korrekt auszuführen.

<129>

Kapitel XI

Die Praxis der arithmetischen Musik oder der Algorithmus der Zahlen der Konsonanzen

Proposition I

Die Addition

Jordanus [Nemorarius] und Boethius haben diesen Algorithmus zwar behandelt, jedoch so undeutlich und schwierig, dass kaum jemand sich diesen schwierigen Gegenstand herleiten könnte. So bauen sie die Quarte (die aus fünf Diësen oder kleinen Halbtönen und zwei

Kommata besteht) nur durch eine mühevollen Multiplikation auf, indem sie die fünf Diësen und zwei Kommata auf folgende Weise anordnen.

Fünf kleine Halbtöne werden so angeordnet

256	256	256	256	256
243	243	243	243	243

Zwei Kommata werden so angeordnet

531.441	531.441
524.288	524.288

Wenn man nun diese Zahlen nach den Regeln der Proportionen multipliziert, erhält man als Produkt der höchst aufwändigen Multiplikation die folgende Zahl, die natürlich eine Quarte ist.¹⁹

310.534.559.388.245.484.896.256	} Quarte
232.900.919.541.184.113.672.192	

Damit unsere Musik, von jeder Schwierigkeit gereinigt, sich deutlicher und angenehmer gestaltet, wollen wir, Stifel folgend, hier eine andere Methode vorstellen, die wir gemäß der cossischen Zahlen oder den astronomisch kleinen so geordnet haben, dass auch für einen Anfänger nichts leichter ist, als gegebene Konsonanzen und Intervalle zu addieren und zu subtrahieren, zu multiplizieren und zu dividieren. Obwohl wir weiter oben schon Notenzeichen angegeben haben, wollen wir sie hier noch einmal wiederholen. Den Ganzton bezeichnen wir mit diesem Zeichen: »I«

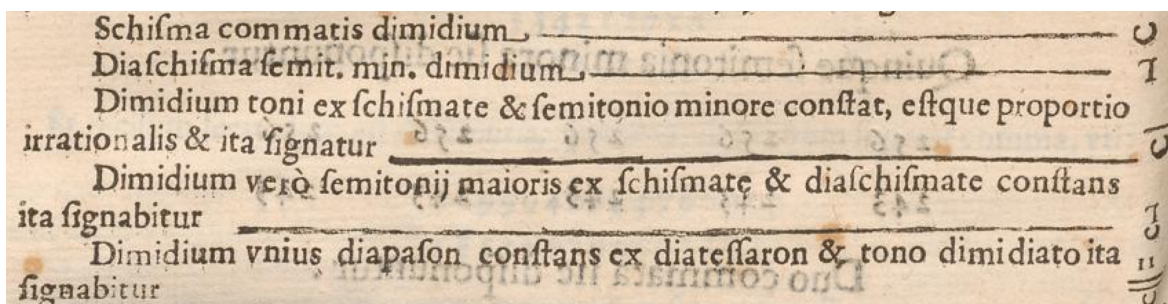
<130>

*Hier sind die graphischen Darstellungen,
mit denen wir die einzelnen Intervalle notieren:*

Ganzton		I
Terz [Ditonus]		II
Tritonus		III
Kleiner Halbton oder Diësis		—
[Pythagoreische] kleine Terz	wird notiert als	I
Quarte, aus zwei Ganztönen und einem kleinen Halbton		II
Quinte, aus drei Ganztönen und einem kleinen Halbton		III
Oktave, aus 5 Ganztönen und 2 kleinen Halbtönen		IIII
Komma, der neunte Teil eines Ganztons		o
Großer Halbton, der aus kleinem Halbton und Komma besteht		ō

Wenn aber Musiker von irrationalen Proportionen sprechen (wie zum Beispiel von Schisma und Diaschisma und einigen anderen), benutzen sie solche Zeichen:

¹⁹ Bei Kircher beginnt die untere Zahl mit 239.....; dieses Verhältnis ergibt nicht 4 : 3.



Schisma, eine halbes Komma / Diaschisma, ein halber kleiner Halbton
Halber Ganzton aus Schisma und kleinem Halbton, eine irrationale Proportion
Halber großer Halbton aus Schisma und Diaschisma
Halbe Oktave aus Quarte und einem halben Ganzton

Man sieht hier, wie gut die einzelnen Intervalle dargestellt werden können, wenn man diese Zeichen verwendet. Wir nutzen sie zur Durchführung jeglicher arithmetischer Operationen. Sollen zum Beispiel zwei Kommata zu fünf Halbtönen hinzugegeben werden, erhält man das gesuchte Ergebnis, wenn man oo zu $\equiv$ hinzufügt, wie folgt: $\equiv$ & oo . Vier Kommata zum Tritonus hinzu ergibt III & oooo . Ein Komma zur kleinen Terz hinzu ergibt I & o .

Wenn man wiederum eine Quinte zu einer Quarte hinzufügen will, erhält man das gesuchte Ergebnis, wenn man III zu II hinzufügt und so erhält man, IIII , das Zeichen, das der Konsonanz der Oktave entspricht. Will man schließlich einen Tritonus zu einer Oktave hinzufügen, erhält man das gesuchte Ergebnis, wenn man IIII zu III hinzufügt und erhält so IIIIII . Genau so geht man auch sonst vor. So wird ein Schisma zur verminderten Quinte hinzugegeben und ergibt eine halbe Oktave wie v zu II , ergibt II & v .

Proposition II

Die musikalische Subtraktion

Wenn man eine Quarte von einer Quinte abziehen will, so schreibt man es so: III II . Denn II abgezogen von III ergibt I . Nach Jordanus bleibt, wenn ein Sesquitercium- [4 : 3] von einem Sesquialterum-Intervall [3 : 2] abgezogen wird, ein Sesquioctavum-Intervall [9 : 8] übrig, also ein Ganzton. Wenn auf diese Weise ein Sesquioctavum- von einem Sesquitercium-Intervall abgezogen wird, d. h. ein Ganzton von einer Quarte, bleibt die kleine Terz übrig, so, wie I von II abgezogen I ergibt. Genauso ist es, wenn man einen kleinen Halbton von einem Ganzton abzieht: dann bleibt ein großer Halbton. — von = & o abgezogen ergibt — & o . Wenn man einen kleinen Halbton von einem großen abzieht, bleibt ein Komma, also — von — & v ergibt o . Die Hälfte eines Ganztones von der Hälfte einer Oktave abgezogen, ergibt die Quarte, also — & o von II & v ergibt II .

Wird schließlich der dritte Teil eines Ganztons von der Summe von zwei Dritteln eines kleinen Halbtönen <131> plus ein Diaschisma sowie des dritten Teil eines Diaschimas plus ein Schisma abgezogen, bleibt noch ein Drittel eines Ganztons übrig. Man sieht also, mit welcher feinsinniger Beweisführung und doch einfacher Methode wir all diese Operationen der Musik durchführen.

Proposition III

Die Multiplikation in der Musik

Man möchte beispielsweise eine kleine Terz aus Schisma und Diaschisma mit 4 multiplizieren. Das stelle man wie nebenstehend auf. Dann multipliziert eines man jedes Einzelne mit 4 und folgende Anordnung der Zeichen: IIII & ≡ & □□□□ & ∪∪∪∪.

Das heißt, vier kleinere Halbtöne und vier Schismata ergeben zwei Ganztöne, die gemeinsam mit vier Ganztönen und vier Diaschismata, also zwei kleinen Halbtönen, zwei Quinten ergeben, wie die Darstellung zeigt.

Ein kleiner Halbton und ein Schisma mit 6 multipliziert, ergibt einen Tritonus. Dies stellt man wie folgt dar. Multipliziert man dann die einzelnen Zeichen »—« und »_« mit 6, erhält man als Ergebnis $\equiv \text{uuuuuu}$. Wenn man die genannten Werte mit 6 multipliziert, ergeben sich also drei III oder Ganztöne. Denn drei Ganztöne, die in sechs Diësen und sechs Schismata zerlegt werden, ergeben drei Ganztöne.

Wenn man wiederum eine verminderte Quinte und ein Schisma mit 4 multipliziert, erhält man eine Doppeloktave, wie es die Darstellung zeigt. Man multipliziert die einzelnen Zeichen mit 4 und erhält folgende Zeichen: ||||| ||||| ||||| |||||. Diese einzelnen Zeichen bilden die Doppeloktave, die hier aufgelöst ist, das heißt eine Proportio quadrupla, wie nebenstehend gezeigt.



Proposition IV

Die musikalische Division

Will man eine Doppelquinte durch 4 teilen, erhält man eine kleine Terz mit Schisma und Diaschisma. Was geteilt werden soll, sieht so aus: IIIIII. Man teilt also die obigen sechs [Ganztöne] durch 4 und erhält $1\frac{1}{2}$, den Sesquiton [Eineinhalbganzton], d. h.:

$$\frac{1}{U}$$

Dann teilt man zwei kleine Halbtöne durch 4 und erhält $\frac{1}{2}$ von einem kleinen Halbton. Das ist ein Diaschisma und wird mit diesem Zeichen dargestellt: $\overline{1}$. So ergibt auch der Tritonus durch 6 geteilt das Ergebnis — & $\searrow$, $\frac{1}{2}$ Ganzton.

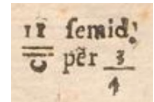
Auf gleiche Weise ergibt eine Doppeloktave, wenn man sie durch 4 teilt, eine verminderte Quinte mit Schisma. Zuerst werden zehn Ganztöne durch 4 geteilt: Das ergibt $2\frac{1}{2}$ Ganztöne, d. h. II. Dann das Übrige, also vier kleinere Halbtöne durch 4: Es bleibt —, ein kleiner Halbton. Insgesamt ergibt sich II & ∩.

Proposition V

Multiplikation mit Brüchen

$\frac{11}{5}$ Semidiapente [verminderte Quinte] durch 3 : 4

Will man eine verminderte Quinte mit $\frac{3}{4}$ multiplizieren, dann ergibt das eine kleine Terz mit einem kleinen Halbton, einem Schisma und einem Diaschisma, d. h. I & $\equiv$ & $\cup$. Man gehe so vor wie in dem am Rand abgedruckten Beispiel. Zuerst multipliziere man zwei Ganztöne mit dem Zähler 3 und teile das Ergebnis durch den Nenner, also durch 4. Es ergibt sich $1\frac{1}{2}$ Ganztöne, d. h.:



$$\frac{I}{U}$$

Zweitens multipliziere man die zwei kleinen Halbtöne mit dem Zähler und teile das Produkt durch den Nenner. Das ergibt $1\frac{1}{2}$ eines kleinen Halbtönen mit Diaschisma. Wenn man dies prüfen will, gehe man so vor: Die Multiplikation von I & $\equiv$ & $\cup$ mit 4 ergibt vier Ganztöne, acht kleine Halbtöne, vier Schismata und vier Diaschismata. Fasst man dies zusammen, ergeben sich sechs Ganztöne und sechs kleine Halbtöne. Teilt man das durch 3, erhält man zwei Ganztöne und zwei kleine Halbtöne. Das ist $\frac{11}{5}$, die verminderte Quinte. Daraus wird deutlich, dass $\frac{11}{5}$ eines Ganztönen aus $\frac{3}{4}$ eines kleinen Halbtönen mit Diaschisma und $\frac{1}{3}$ eines Diaschismas mit Schisma und $\frac{1}{3}$ eines Schismas bestehen. Es wird auch deutlich, dass vier Ganztöne geteilt durch 3 und ebenso acht kleine Halbtöne geteilt durch 3 $\frac{11}{5}$ ergeben. Wenn man von diesen Quotienten $1\frac{1}{2}$ eines Ganztönen mit zwei kleinen Halbtönen abzieht, bleiben $\frac{3}{4}$ eines kleinen Halbtönen, $\frac{4}{3}$ eines Diaschismas und $\frac{4}{3}$ eines Schismas übrig. Diese alle zusammen ergeben $\frac{3}{4}$ eines Ganztönen. Das zeige ich, indem $\frac{3}{4}$ eines Ganztönen zu $1\frac{1}{2}$ eines Ganztönen zugezählt wird, was zwei volle Ganztöne ergibt, die zusammen mit zwei kleinen Halbtönen die verminderte Quinte ergeben. Doch das ist aus dem Vorangegangenen schon bekannt.

Proposition VI

Die musikalische Teilung durch Brüche

Es sollen zum Beispiel acht Ganztöne und drei kleine Halbtöne durch $\frac{8}{5}$ geteilt werden oder, was dasselbe ist, [mit] $\frac{5}{8}$ [multipliziert]. Das ergibt fünf Ganztöne und $\frac{15}{8}$ eines kleinen Halbtönen. Daraus wird deutlich, dass noch $\frac{1}{8}$ eines kleinen Halbtönen zur Vollendung der Oktave fehlt. Man sieht also, wie schön und kunstvoll irrationale durch rationale Zahlen berechnet werden können. Ohne Zweifel werden damit schlaue Köpfe eine riesige Menge neuer Erfindungen zur Auflösung solcher Zahlen machen. Doch wie nicht jeder nach Korinth gehen kann,²⁰ so wollen wir es tiefgründigeren Geistern überlassen, diese Früchte zu kosten.

²⁰ Wohlstand und kulturelle Blüte Korinths waren sprichwörtlich. Vgl. Horaz, Epist. I XVII 36.

Kapitel XII

Die Teilung des Ganztons

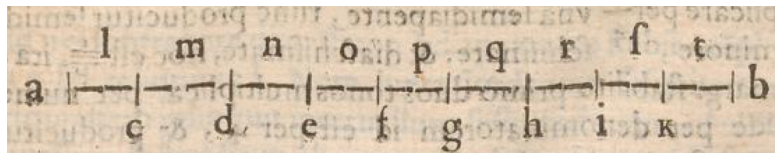
Zu allen Zeiten herrschte unter den Autoren ein Streit über die Teilung des Ganztones. Bislang hat sich noch keiner gefunden, der diesen Streit schlüssig hätte entscheiden können. Boethius, Jordanus und Stapulensis [Jacques Lefèvre d'Étaples] behaupten, dass dies auch gar nicht möglich sei. Doch einige neuere Autoren halten es für eine leichte Aufgabe.

Ein Ton kann durch eine ganze, natürliche Zahl
nicht in zwei gleich große Teile geteilt werden.

Um den Streit beizulegen, sagen wir, es sei ἀδύνατον [unmöglich], einen Ganzton durch eine ganze, natürliche Zahl in zwei Teile zu teilen. Trotzdem kann ein Ganzton geteilt werden (wie auch alle anderen Konsonanzen), wenn man gewisse Bruchteile akzeptiert, die gemeinsam eine rationale Zahl bilden. Diese Meinung wollen wir so beweisen:

Proposition I

*Ein Ganzton kann nicht durch eine bestimmte natürliche Zahl
[numerus certus et constitutus] in zwei gleiche Teile geteilt werden (das heißt:
Wenn der Raum zwischen zwei Tönen zweigeteilt wird,
wird damit nicht auch der Ton in zwei gleiche Teile geteilt.)*



Es werde die Intervall-Strecke $a b$ des Ganztons in neun gleiche Teile geteilt. Dann ist klar, dass $a b$ und $c b$ die äußeren Töne sind, da die Proportion eines Ganztones $9 : 8$ beträgt. Nun wird in gleicher Weise jeder der neun Teile zweigeteilt: bei l, m, n, o, p, q etc. Ich behaupte, dass, wenn der Raum zwischen a und c durch l zweigeteilt ist, der Ton dann nicht gleichmäßig geteilt werde. Denn die Intervalle $a b$ und $l b$ sind nicht gleich groß wie die Intervalle $l b$ und $c b$. $l b$ ist nämlich ein Teil der ganzen Strecke $a b$. Deswegen ist das Verhältnis von $a b$ zu $l b$ größer als das von $l b$ zu $c b$. Letztere ist die Proportio sesquidecima sexta [$17 : 16$], <133> erstere die Proportio sesquidecima septima [$18 : 17$]. Denn wie Jordanus richtig beweist, ist, wenn eine beliebige Strecke durch beliebig viele gleiche Abstände geteilt wird, das Verhältnis des Ganzen zur Teilstrecke vom nächstgelegenen Teilungspunkt bis zum Ende kleiner als das Verhältnis dieser Teilstrecke zur verbleibenden Strecke vom zweiten Teilungspunkt zum Ende. Gemäß dieser zitierten Behauptung ist die Proportion $a b$ zu $l b$ also kleiner als die von $l b$ zu $c b$ und verhält sich [auch tatsächlich] wie die Proportio sesquidecima septima [$18 : 17$] zur Proportio sesquidecima sexta [$17 : 16$]. Demnach kann also ein Ganzton nicht in zwei gleiche Teile geteilt werden, und logischerweise müssen die Intervalle $a b / l b$, und $l b / c b$ ungleich sein. Ein Ganzton kann also nicht in zwei gleiche Teile geteilt werden: was zu beweisen war.

Da außerdem die Proportion des einen Tons zum anderen die gleiche ist, die auch zwischen den Intervallabständen herrscht, und da das Intervall des Ganztons die superpartikuläre Proportion hat, kann man auch arithmetisch beweisen, dass die Zweiteilung ἀδύνατον [unmöglich] ist: nämlich auf die Weise, dass der Ton die besagte Proportion hat, also die Proportio sesquioctava [9 : 8], die eben nicht zweigeteilt werden kann. Auch in mehrere, zum Beispiel in drei oder vier gleiche Teile kann er nicht geteilt werden, was aus dem Gesagten einleuchtet und im Folgenden noch deutlicher wird.

Corollarium

Die Meinung des Aristoxenos zur Tonteilung

Daraus ist leicht erkennbar, dass Aristoxenos, der alles dem Urteil des Ohres überließ, vollkommen in die Irre ging, wenn er glaubte, dass die Halbtöne, anders als die Pythagoreer meinten, tatsächlich die Ganztöne in der Mitte teilen. Seinen Nachfolger Martianus Felix ertappt man bei einem noch ärgerlicheren Fehler: Er teilt einen Ton nicht nur in zwei gleiche Teile, sondern in drei und vier. Zunächst teilt er den Ganzton in zwei gleiche Teile, die er deshalb auch Halbtöne nennt, dann zweitens in drei Teile, wobei er jeden dieser Teile Drittel-Diësis nennt, schließlich in vier Teile und nennt jeden Teil Viertel-Diësis. Seine Diësis ist also bald eine Drittel-, bald eine Viertel-Diësis.

Proposition II

Wie man einen Ganzton durch irrationale Zahlen in zwei gleiche Teile teilt

Wie ein Ton mit irrationalen Zahlen geteilt wird

Im Vorhergehenden haben wir gesagt, dass ein Ganzton durch eine bestimmte natürliche Zahl nicht in zwei gleiche Teile geteilt werden kann. Jetzt wollen wir sehen, ob er nicht durch eine unbestimmte [incerto], nicht ganzzahlige [nullis unitatibus aggregato], d. h. durch eine irrationale Zahl geteilt werden kann. Wer die Sache genau prüft, wird sicher erkennen, dass Schisma und Diaschisma von Philolaos aus keinem anderen Grund eingeführt worden sind, als um damit die Zweiteilung des Ganztons zu ermöglichen. Das soll nun syllogistisch nachgewiesen werden:

[Obersatz] Wer eine Halbierung des Kommas annimmt, kann der Halbierung des Ganztons nicht widersprechen.

[Untersatz] Boethius nimmt, in der Nachfolge von Philolaos, ein Schisma an (was ja nichts anderes ist als die Hälfte des Kommas).

[Konklusion] Also muss er auch die Halbierung des Ganztons annehmen.

Beweis des Obersatzes: Wer ein halbes Komma mit kleinem Halbton annimmt, der setzt damit die Hälfte des Ganztons an. Aber wer das Schisma mit dem kleinen Halbton setzt, der setzt auch Komma mit dem kleinen Halbton an. Damit gibt er die Hälfte des Ganztons an, also kann er eine Halbierung des Ganztons nicht abstreiten. Nach Philolaos ist nämlich

a) eine Diësis der Betrag, um den die Proportio sesquitercia [4 : 3] größer ist als zwei Ganztöne, b) das Komma der Betrag, um den die Proportio sesquioctava [9 : 8] größer ist als zwei Diësen, das heißt zwei kleine Halbtöne, und c) das Schisma die Hälfte eines Kommas wie das Diaschisma die Hälfte einer Diësis, das heißt eines kleinen Halbtons. Wenn man das annimmt, folgt daraus notwendig, dass ein Ganzton, der sonst meist anders geteilt wird – nämlich in eine Diësis, also einen kleinen Halbton, und eine Apotome oder, was dasselbe ist, in zwei Diësen und ein Komma –, auch zweigeteilt wird durch eine Diësis (einen kleinen Halbton oder zwei Diaschismata) und ein Schisma. Da ja, wie es schon häufig wiederholt wurde, der gesamte Ganzton aus zwei kleinen Halbtönen und einem Komma besteht, wird man eine saubere Halbierung erhalten, wenn man zu dem kleinen Halbton ein Schisma hinzufügt. Dieses ist nämlich die Hälfte eines Kommas, wie dies aus der folgenden Darstellung hervorgeht.

Darstellung der Teilung des Ganztons

Man sieht in dieser Darstellung, wie ein Ganzton durch Schismata in zwei gleiche Teile geteilt werden kann und wie die exakte Hälfte eines Ganztons neun Schismata enthält, ein Komma zwei Schismata, ein Diaschisma zwei Kommata, eine Diësis (oder ein kleiner Halbton) zwei Diaschismata. Ein großer Halbton enthält genau zwei Diaschismata und ein Komma.

Verdoppelt oder verdreifacht man den Ganzton und fügt noch eine Diësis oder zwei Diaschismata oder vier Kommata hinzu, erhält man so viele Schismata, Kommata und Diaschismata, wie eine Quarte oder eine Quinte sie enthält. Daraus erkennt man, was deren korrekte Halbierungen sind. Wenn man die Darstellung der Aufteilung des Ganztons verfünffacht und zwei kleine Halbtöne hinzufügt, die in Kommata und Schismata aufgeteilt sind, erhält man eine Oktave, die in Diësis, Diaschismata, Kommata und Schismata geteilt ist. Auch die korrekte Hälfte einer Oktave wird sofort sichtbar. Damit man dies alles wie in einer Synopse betrachten kann, hielt ich es für richtig, an dieser Stelle eine Übersicht des Ganzen anzufügen.

Eine Tafel, die darstellt, wie viele Kommata und Schismata jedes Intervall enthält:

Intervall	besteht aus	Schismata	Kommata
Schisma		1	0
Komma		2	1
Diaschisma		4	2
kl. Halbton		8	4
gr. Halbton		10	5
Ganzton		18	9
verm Terz		26	13
Terz		36	18
Quarte		44	22
Quinte		62	31
Tritonus		54	23
Oktave		106	53

Nachdem wir dies betrachtet haben, bleibt nichts weiter übrig, als dass wir angeben, mit welcher Methode wir den Ganzton und jede andere Konsonanz mit Hilfe algebraischer Wurzelzeichen zweiteilen können.

Die ἡμίωσις [Halbierung] der musikalischen Intervalle

Beispiel I

Die Halbierung eines Kommas

Da sich die Strecke von Schisma zu Schisma verhält wie 524.288 zu 534.441, multipliziert man diese Zahlen miteinander und erhält 278.628.139.008, die Hälfte des Kommas, was sich so darstellt:

$$\begin{array}{rcl}
 5.242.884 & & \} \text{ Schisma} \\
 \sqrt{278.628.139.008} & & \} \text{ Schisma} \\
 534.441 & &
 \end{array}$$

Beispiel II

Die ἡμίωσις des Ganztons

Die Hälfte eines Ganztons erhält man, wenn man die Zahlen seiner minimalen Proportion, der Proportio sesquioctava [9 : 8], miteinander multipliziert, nämlich 8×9 . Es ergibt sich die Quadratwurzel 72. Die Darstellung sieht so aus:

8	} Kleiner Halbton mit Schisma
$\sqrt{72}$	} Hälfte des Ganztons
9	} Kleiner Halbton mit Schisma

Die Richtigkeit davon beweisen wir so: Die Zahlenwerte der Proportion werden quadriert. Es wird deutlich, dass durch die Quadrierung der Teile der Ganzton exakt wiederhergestellt wird. So wird 8 mit sich selbst multipliziert, das ergibt nach den Regeln des Algorithmus für die Proportionen 64, und 9×9 ergibt 81. Zieht man davon 72 ab, so ergeben sich 8 und 9.

8	ergibt quadriert	64	oder	8
$\sqrt{72}$		72		
9		81		9

Die Halbierung des großen Halbtons [auch Apotome] wird erreicht, wenn man Schisma mit Diaschisma verbindet.

Rechnung:

2.048	} Schisma mit Diaschisma
$\sqrt{4.478.976}$	} Hälfte des großen Halbtons ²¹
2.187	} Schisma mit Diaschisma

Beispiel III

Die Halbierung der Oktave

Da eine Oktave aus fünf Ganz- und zwei kleinen Halbtönen besteht, also IIIII, bildet ihre Hälfte die verminderte Quinte mit Schisma, wie es die Rechnung zeigt:

1	} verminderte Quinte mit Schisma
$\sqrt{2}$	} beide verbunden ergeben die Oktave
2	} vermindert Quinte mit Schisma

²¹ Das Verhältnis 2.048 (2^{11}) zu 2.187 (3^7) entspricht dem großen Halbton.

Da eine Oktave, wie gesagt, aus fünf Ganz- und zwei kleinen Halbtönen besteht und zwei Schismata ein Komma und zwei kleine Halbtöne mit Komma einen Ganzton ergeben, ist es klar, dass sich IIII Ganztöne ergeben, wenn II & II vereinigt werden. Da zudem ein vollständiger Ganzton entsteht aus zwei kleinen Halbtönen = und zwei Schismata $\cup\cup$, ergibt sich, wenn man diesen mit den IIII bereits gefundenen Ganztönen zusammenfügt, und noch die restlichen zwei kleinen Halbtönen hinzunimmt, als Summe die vollständige Oktave, die so bezeichnet wird: IIII.

<137>

Beispiel IV

Die Halbierung der Quarte

Hier begegnet uns eine nicht unerhebliche Schwierigkeit, nämlich wie eine Quarte halbiert werden kann. Doch wer das Vorausgegangene richtig verstanden hat, muss keine Angst mehr haben.

Wir lösen die Aufgabe so: Im Vorherigen haben wir als Hälfte des kleinen Halbtons das Diaschisma angesetzt, und sehen es unter den besagten Zahlen 243 und 256, die 62.258 [korrekt: 62.208] ergeben, wenn wir sie miteinander multiplizieren. Die Rechnung sieht so aus:

$$\begin{array}{rcl} 243 & \} & \text{Diaschisma.} \\ \sqrt{62.258} & \} & \\ 256 & \} & \text{Diaschisma.} \end{array}$$

Da eine Quarte aus zwei Ganz- und einem kleinen Halbton besteht, also II, muss ihre Hälfte notwendigerweise ein Ganzton mit Diaschisma sein, also I & 7. Verdoppelt [quadriert] man dies, wird [die Quarte] wiederhergestellt als II. 77, zwei Diaschismata, ergeben nämlich —, einen kleinen Halbton; I & 7 zusammen mit I & 7 ergibt also offensichtlich II. Wenn man zudem noch die kleinsten Zahlenwerte der Proportion der Quarte [4 : 3] miteinander multipliziert, erhält man 12, wie es die Rechnung zeigt:

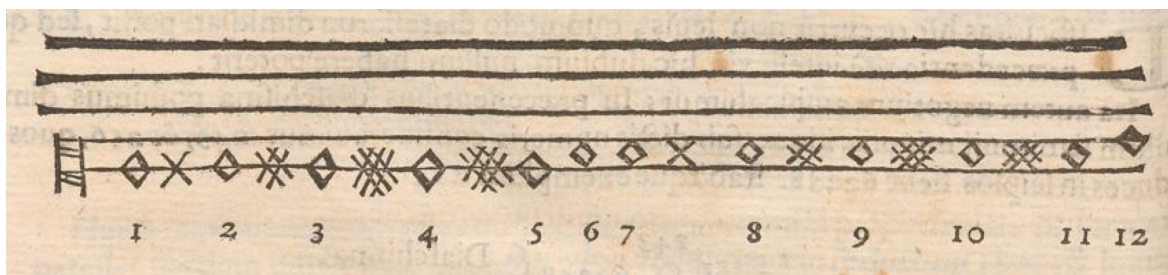
$$\begin{array}{rcl} 3 & \} & \text{Ganzton mit Diaschisma: I \& 7.} \\ \sqrt{12} & \} & \\ 4 & \} & \text{Ganzton mit Diaschisma : I \& 7.} \end{array}$$

Aus all dem wird klar, dass man den besagten Ganzton ohne Schwierigkeiten in zwei Teile teilen kann. Das hat auch Jordanus nicht bestritten. Aber wo einige Autoren das bestreiten, muss man sehen, dass dies nur bei einer bestimmten, natürlichen Zahl oder, was dasselbe ist, bei einer rationalen Zahl gilt. Es gilt nicht bei einer unbestimmten Zahl, die nicht aus ganzzahligen Teilen aufgebaut ist, also bei den irrationalen Zahlen. Dass man eine solche als Teiler verwenden kann, geht aus dem Vorhergehenden hervor.

So bestehen einige der oben besprochenen Halbierungen zum einen Teil aus bestimmten oder rationalen Zahlen, zum anderen Teil aus unbestimmten und unbekannten, also irrationalen Zahlen, was das Zeichen »√« deutlich macht, wie es Kenner der Algebra wissen.

Ich weiß sehr wohl, dass man einen Ganzton mathematisch exakt nicht in fünf Teile teilen kann. Da die Diësis, wie wir sie auffassen, die Differenz zwischen einem großen und einem kleinen Halbton ist (wohingegen viele, und hauptsächlich diejenigen, die Aristoxenos folgen, sie dem kleinen Halbton gleich erachten), so folgt daraus, dass ein Ganzton nicht in genau fünf gleiche Teile geteilt werden kann, da zwei Diësen gemäß unserer streng mathematischen Auffassung größer sind als ein kleiner Halbton. Weil zwei Diësen nämlich in der Proportion 16.384 zu 15.625²² stehen – Zahlen die sich zueinander verhalten wie $25^{2591}/15625$ zu $\langle 138 \rangle 24$ –, ist klar, dass der Überschuss, um den zwei Diësen den kleinen Halbton überragen, $^{2591}/15625$ ist. All dies ist den tiefsinnigeren Kennern der Theorie bekannt.

Deshalb irrt Fabio Colonna, wenn er glaubt, man könne einen Ganzton in fünf genau gleiche Teile unterteilen. Folglich sind auch seine enharmonischen Tonstufen falsch, die er auf seiner Sambuca in der folgenden Reihenfolge festlegt:



In diesem Schema hat er immerhin geistreich die enharmonischen Tonstufen aufgezeichnet, und sicher hat sie keinen wahrnehmbaren Fehler auf den Instrumenten verursacht. Dennoch irrt er: denn er nimmt an, diesen Ganzton streng mathematisch in fünf gleiche Teile geteilt zu haben, was wir als unmöglich nachgewiesen haben.

Dass wir aber im Vorausgegangenen den Ganzton in neun gleiche Kommata geteilt haben, das geschah einerseits, um die Teilung des Ganztons zu vereinfachen, wie es auch Philolaos und andere Alte meinten, aber auch um die Schwierigkeiten der Bruchzahlen zu vermeiden, und ferner schließlich, da eine solche Vorgehensweise in der musikalischen Praxis wohl kaum einen Fehler verursacht.

Um dennoch dem Tadel der etwas pedantischeren Meister der Theorie zu entgehen, meine ich, dass man, gemäß der Methode des Aristoxenos, der einen Ganzton in zwölf gleiche Halbtöne teilt, die Tonstufen einer diatonisch-chromatisch-enharmonischen Oktave auf folgende Weise ordnen muss:

²² $2^{14} : 5^6$

System oder Oktave, geteilt in zwölf gleiche Halbtöne:



Tonstufen einer diatonisch-chromatisch-enharmonischen Oktave:



Die Semibreven bezeichnen diatonische Tonstufen, die Minimae chromatische und die Semiminimae enharmonische. Genauso bezeichnet ein einfaches Kreuz die enharmonische Diësis, ein doppeltes die chromatische oder den kleinen Halbton und das dreifache die enharmonische Stufe.

<139>

Kapitel XIII

Drei Arten der Ordnung von Musik und der Tetrachorde

Ein Tongeschlecht [genus modulandi] ist nichts anderes als ein bestimmtes Verhältnis [habitus] oder eine Übereinstimmung von Klängen, die gemeinsam eine Quarte bilden. Es ist in diesem Zusammenhang nichts anderes als eine bestimmte Beziehung, welche vier Töne oder drei Intervalle eines Quartraums [Quartae] untereinander haben, was Viele als ein Tetrachord bezeichnen. Das Tetrachord der Griechen ist eine festgelegte Ordnung von Klängen, die in vier Saiten enthalten ist, deren äußere in derjenigen Proportion auseinanderliegen, die eine Quarte bildet, also der Proportio sesquitercia [4 : 3]. Die ersten Musiker [priscis musicis] nahmen drei Tongeschlechter an: erstens das diatonische, zweitens das chromatische und drittens das enharmonische. Die besagten Geschlechter sind diese Gattungen, weil durch unterschiedliche Teilung der Tetrachorde zwar unterschiedliche Arten des Modulierens entstanden, die aber wieder auf diese drei Gattungen zurückgeführt wurden. An dieser Stelle will ich nichts weiter zu den unterschiedlichen Teilungen sagen, die von verschiedenen Autoren der Alten – von Aristoxenos, Archytas, Didymos, Eratosthenes und anderen – vorgenommen wurden (all deren Handschriften sind in meinem Besitz). Stattdessen will ich nur solche Teilungen anführen, die am ehesten einen

Beitrag für unser Thema zu liefern scheinen. Von dieser Art sind die des Ptolemaios: Sie sind unter den anderen die vernünftigsten und stimmen mit der Natur überein. Um zur Sache zu kommen, stelle ich zuerst fest, dass das Tongeschlecht, das wir als *diatonisch* bezeichnen, von den verständigeren Musikern in fünf Unterarten geteilt wird, d. h. in das pythagoreisch-diatonische [diatonicum pythagoricum], das diatonische Moll [molle], das syntonische [syntonum], tonische [toniacum] und das diatonisch-äquale [aequale].

§ I

Die fünf Formen des diatonischen Tongeschlechts

In diesem Paragraphen will ich die eben genannten fünf Arten [Species] nur kurz erklären und werde dann in zwei weiteren Paragraphen die beiden anderen Gattungen [Genera] darstellen.

Die pythagoreisch-diatonische Species

Die pythagoreisch-diatonische Species schreitet in ihren Tetrachorden über das Intervall eines kleinen Halbtons, d. h. nach der Proportio supertredecupartiens ducentesimas quadragessimas tertias [256 : 243], was Ptolemaios auch als »Apotome« [Αποτομήν] bezeichnet. Boethius nennt es auch »Limma« [λεῖμμα] oder »Diësis« [διεσιν]. Von einem solchen kleinen Halbton und über zwei Ganztöne, die in der Proportio sesquioctava [9 : 8] stehen, geht es vom tiefen Ton zum hohen und in Gegenrichtung vom hohen Ton zum tiefen durch die erwähnten [zwei] Ganztöne und den kleinen Halbton. Man sehe sich das folgende Beispiel an:

<140>

Das pythagoreisch-diatonische Tetrachord

6.144	_____	Hypate meson.
	wie 8 : 9, Ganzton in der Proportio sesquioctava	
6.912	_____	Lychanos hypaton.
	wie 8 : 9, Ganzton in der Proportio sesquioctava	
7.777	_____	Parhypate hypaton.
	wie 243 : 256, kleiner Halbton	
8.192	_____	Hypate hypaton.

Daraus wird deutlich, dass dieses Tongeschlecht so genannt wird, weil es immer über zwei Ganztöne und einen kleinen Halbton voranschreitet. Dass dies eine ganz besondere Übereinstimmung mit dem Bau der Welt und der Natur hat und von den alten Philosophen Platon und Aristoteles sehr geschätzt wurde, soll in der Physiologie der Musik dargestellt werden.

Die Diatonik in Moll

Diatonik in Moll nennt man es, wenn das Tetrachord vom tiefen zum hohen Ton über das Intervall der Proportio sesquivigesima [21 : 20] und zwei andere Intervalle verläuft, von denen das eine in der Proportio sesquinona [10 : 9], das andere in der Proportio sesquiseptima [8 : 7] steht, wie es das Beispiel deutlich macht:

Das diatonische Tetrachord in Moll

63	_____	Hypate meson.
	Sesquiseptima, 7 : 8	
72	_____	Lychanos hypaton.
	Sesquinona, 9 : 10	
80–45	_____	Parhypate hypaton.
	Sesquivigesima, 20 : 21	
84–48	_____	Hypate hypaton.

Die syntonische Diatonik

Die syntonische Diatonik, die andere auch die »erregte« [incitatus] nennen, ist jene Diatonik, deren Tetrachord vom tiefen zum hohen Ton über ein Intervall in der Proportio sesquiquintadecima [16 : 15] verläuft, das zwischen der ersten und zweiten Saite gestimmt [contentus] wird, dann über ein zweites Intervall in der Proportio sesquioctava [9 : 8] und zuletzt über ein Intervall in der Proportio sesquinona [10 : 9]. Rückwärts vom hohen zum tiefen Ton steigt es über dieselben Intervalle herab, wie man hier sehen kann:

Das syntonische Tetrachord

Proportio sesquitercia [4 : 3]	P. sesquiquarta [5 : 4]	Prop. sesquiquinta [6 : 5]	Große Zahlenwerte		
			36	_____	Hypate meson.
				Prop. sesquinona, 9 : 10, kleiner Ganzton.	
			40	_____	Lychanos hypaton.
				Prop. sesquioctava, 8 : 9, großer Ganzton.	
			45	_____	Parhypate hypaton.
				Proportio sesqui[quinta]decima, 16 : 15, kleiner Halbton.	
			48	_____	Hypate hypaton.

<141>

Dieses Tetrachord ist das eigentlich diatonische Tongeschlecht, wie es die jüngeren Musiker gebrauchen. Seine Zahlenwerte liegen nämlich alle im Bereich der klingenden Zahlen, die wir im Folgenden noch ausführlicher besprechen werden.

Die toniakische [toniacus] Diatonik

Die toniakische Diatonik, die einige mit der in Moll verwechseln, ist die, deren Tetrachord folgendermaßen aufgebaut ist. Die erste und die zweite Saite bilden ein Intervall in der Proportio sesquigesima septima, also 27 : 28. Das zweite Intervall steht in der Proportio sesquiseptima, also 7 : 8, das dritte in der Proportio sesquioctava, also 8 : 9. Der Aufstieg geht so von tief nach hoch und von da wieder nach tief über dieselben Intervalle, wie es hier zu sehen ist:

Das toniakisch-diatonische Tetrachord

Große Zahlenwerte

168	_____	Hypate meson.
	Proportio sesquioctava, 8 : 9.	
189	_____	Lychanos hypaton.
	Proportio sesquiseptima, 7 : 8.	
216	_____	Parhypate hypaton.
	Proportio sesquivigesima septima, 27 : 28.	
224	_____	Hypate hypaton.

Die äquale Diatonik

Äquale Diatonik wird diejenige genannt, deren Tetrachord vom tiefen zum hohen Ton zunächst mit dem Intervall der Proportio sesquiundecima (also 11 : 12) aufsteigt, dann mit einem zweiten in der Proportio sesquidecima (also 10 : 11) und schließlich mit einem dritten in der Proportio sesquinona (also 9 : 10), wie es unten deutlich wird:

Das diatonische Tetrachord äquale

9	_____	Hypate meson.
	Proportio sesquinona, 9 : 10.	
10	_____	Lychanos hypaton.
	Proportio sesquidecima, 10 : 11.	
11	_____	Parhypate hypaton.
	Proportio sesquiundecima, 11:12.	
12	_____	Hypate hypaton.

Man hat diese Diatonik »äqual« genannt, weil sie mit der Gleichmäßigkeit einer arithmetischen Reihe voranschreitet. Sie war zu allen Zeiten sehr beliebt. Deshalb hat Ptolemaios sie nicht ohne Grund mit theologischen und politischen Dingen verglichen: siehe dazu Zarlino, Boethius und andere.

§ II

Das chromatische Tongeschlecht

Das zweite Tongeschlecht ist das »chromatische«. Es wird so genannt, weil es die Farbe der Diatonik verändert. Zwischen dem ersten und dem dritten spielt es die gleiche Rolle wie bunte Farben zwischen schwarz und weiß. <142> Es hat drei verschiedene Tetrachorde: ein »altes«, eins in Moll und ein syntonisches [antiquum, molle, syntonum]. Das erste geht über zwei Halbtöne und einen Eineinhalbton [Trihemitonium] voran, das heißt, es steigt aufwärts vom tiefen zum hohen Ton über das Intervall eines kleinen Halbtons. Dann über ein zweites Intervall eines etwas größeren Halbtons, dessen Proportion die Proportio superquintupartiens 76 [81 : 76] ist, und schließlich ein drittes Intervall, das drei Halbtöne enthält, weswegen Boethius es das »Trisemitonium incompositum« nennt. Da sie in diesem Tongeschlecht von keiner anderen Saite geteilt werden konnte, herrscht hier die Proportio supertripartiens decimas sextas [19 : 16], wie es hier deutlich wird:

<i>Das chromatische Tetrachord der Alten</i>		
Quarte [4 : 3]	6.144	Hypate meson.
	Eineinhalbton in Proportion 16 : 19.	
	7.296	Lychanos hypaton.
	Halbton in Proportion 76 : 81.	
	7.776	Parhypate hypaton.
	Kleiner Halbton in Proportion 243 : 256.	
	8.192	Hypate hypaton.

Die *Chromatik in Moll* ist jene, deren Tetrachord so geordnet ist, dass die erste tiefste Saite und die zweite ein Intervall von der Proportio sesquivigesima septima [27 : 28] bilden. Die zweite und dritte Saite bilden ein Intervall von der Proportio sesquidecima quarta [14 : 15], die dritte und die letzte, hohe eines von der Proportio sesquiquinta [5 : 6]. Dieses Intervall galt auch als Konsonanz, was die Zahlenwerte der Proportion ganz deutlich klar machen. Ihre Wurzelzahlen sind zwischen 6 und 5 angesiedelt bei den Teilen der klingenden Zahl. Das folgende Beispiel soll uns in allen Dingen besser unterrichten:

Das chromatische Tetrachord in Moll

105	_____	Hypate meson. Proportio sesquiquinta, 5 : 6.
126	_____	Lychanos hypaton. Proportio sesquiquartadecima, 14 : 15.
135	_____	Parhypate hypaton. Proportio sesquivigesimaseptima, 27 : 28.
140	_____	Hypate hypaton.

»*Chromatisch*« oder »erregt« [incitatum] wird das Tongeschlecht genannt, dessen Tetrachord so geordnet ist, dass die erste und die zweite Saite im Abstand eines Intervalls in der Proportio sesquivigesimaprima [21 : 22] klingen, die zweite und die dritte in der Proportio sesquiundecima [11 : 12] und die dritte und die vierte in der Proportio sesquisexta [6 : 7]. Dazu die Darstellung:

Darstellung der syntonischen oder beschleunigten Chromatik

66	_____	Hypate meson. Proportio sesquisexta, 6 : 7.
77	_____	Lychanos hypaton. Proportio sesquiundecima, 11 : 12.
84	_____	Parhypate hypaton. Proportio sesquivigesimaprima, 21 : 22.
88	_____	Hypate hypaton.

<143> Wegen seiner Kraft zur Verweichlichung der Herzen [vim quandam effaeminativam] wurde dieses Tongeschlecht von den Alten nicht häufig verwendet, wie Macrobius berichtet. Ptolemäus vergleicht es mit dem Stand der Hauswirtschaft [Oeconomico statui].

§ III

Das enharmonische Tongeschlecht

Das dritte Tongeschlecht ist das enharmonische, das bei den Alten zwei Formen hatte: eine sogenannte »alte« [antiquum] und die »ptolemäische« [Ptolemaicum]. Das »alte« Tetrachord war so aufgebaut, dass der Aufstieg vom tiefen zum hohen Ton über zwei Diësen und einen Ditonus incompositus verlief. Man konnte nämlich bei diesem Tongeschlecht mit nur dem einem Intervall auskommen. Die tiefere Diësis hatte die Proportio supra trigintatri-

partiensi quadringentesimas nonas [499 : 512], die höhere die Proportio supertredecupartiensi 486 [486 : 499]. Sie waren also in einer arithmetischen Reihe angeordnet. Nach Meinung der Alten war diese Diësis die Hälfte des kleinen Halbtons.

Darstellung der alten Enharmonik

6.144	_____	Hypate meson.
	Ditonus [64 : 81; pythagoreische große Terz].	
7.776	_____	Lychanos hypaton.
	Diësis [486 : 499].	
7.984	_____	Parhypate hypaton.
	Diësis [499 : 512].	
8.192	_____	Hypate hypaton.

Das ptolemäische enharmonische Tetrachord ist jenes, bei dem der Aufstieg vom tiefen zum hohen Ton von der ersten zur zweiten Saite über ein Intervall in der Proportio sesquiquadragesima quinta [45 : 46] verläuft, von da zur dritten Saite über ein Intervall in der Proportio sesquivigesima tertia [23 : 24] und von da zur vierten Saite über ein Intervall in der Proportio sesquiquarta [4 : 5]. Dieses Intervall ist konsonant. Die Form seiner Proportion wird nämlich durch das Verhältnis von 5 : 4 in den Teilen der Zahl sechs erfasst. Das ist die richtige enharmonische Terz, zu der im Folgenden die Darstellung folgt:

Darstellung der ptolemäischen Enharmonik

276	_____	Hypate meson.
	Proportio sesquiquarta, 4 : 5.	
345	_____	Lychanos hypaton.
	Proportio sesquivigesima tertia, 23 : 24.	
360	_____	Parhypate hypaton.
	Proportio sesquiquadragesima quinta, 45 : 46.	
368	_____	Hypate hypaton.

Dies also sind die drei Tongeschlechter, deren sich die Alten bedienten. Die Jüngeren benutzen gewöhnlich nur noch das erste und das zweite. Damit man aber das eben Gesagte besser verstehen kann, werden wir es noch mit Noten [notis suis] darstellen, damit auch praktische Musiker erkennen können, was unsere Absicht ist, wenn wir die unterschiedlichen Tetrachorde der drei Tongeschlechter angeben.

Die erste und die letzte Saite sind jeweils für alle drei Tongeschlechter gleich. Die mittleren aber sind eigentümlich für je ein Tongeschlecht.

<144> Bei dem *diatonischen* Tongeschlecht bestehen die Tetrachorde, wie gesagt, aus einem kleinen Halbton und zwei Ganztönen.

Beim *chromatischen* aus zwei Halbtönen und einem Eineinhalbton oder kleinen Terz.

Beim *enharmonischen* aus zwei Diësen und einem Ditonus oder großer Terz.

Das jeweilige System der drei Tongeschlechter setzt sich aus fünf Tetrachorden zusammen. Das erste Tetrachord davon nennt man dasjenige der Grundtöne [Principalium] oder auf Griechisch »Hypaton«, das zweite »Meson« oder das der mittleren Töne. Das dritte das der verbundenen Saiten oder »συννημμένων« [Synnemenon]. Das vierte das der unverbundenen Saiten oder »διαzeugμένων« [Diazeugmenon] und das fünfte schließlich »νητῶν« [Neton] oder das der hohen Saiten. Es ist so, dass die vierte Saite des ersten Tetrachords gleichzeitig die erste Saite des zweiten Tetrachords ist, die vierte Saite des zweiten Tetrachords die erste des dritten. Daher spricht man vom Tetrachord der verbundenen Saiten, weil die vierte Saite des zweiten Tetrachords mit der ersten des dritten verbunden ist. Die erste Saite des vierten Tetrachords aber weicht von der vierten Saite des zweiten Tetrachords um einen Ganzton ab, was alles aus dem musikalischen Handwerk bekannt ist. Damit man dies alles noch genauer verfolgen kann, haben wir die einzelnen Tetrachorde der drei Tongeschlechter hier mit musikalischen Tonbuchstaben dargestellt, woraus sicher ohne Anstrengung Klarheit gewonnen wird, wenn bisher vielleicht etwas zu dunkel aufgezeigt worden ist.

*Wie die lateinischen und griechischen Saitenbezeichnungen den musikalischen
Tonbuchstaben über fünf Tetrachorde zugeordnet werden:*

	A	Nete hyperboleon, die letzte der hohen Saiten.
Tetrachordon neton.	G	Paranete hyperboleon, die zweite der hohen Saiten.
	F	Trite hyperboleon, die dritte der hohen Saiten.
	E	Nete, die letzte der unverbundenen Saiten
Tetrachordon diazeugmenon.	D	Paranete diezeugmenon, die zweite der unverbundenen Saiten.
	C	Trite diezeugmenon, die dritte der unverbundenen Saiten.
	B	Paramese, die nächste der mittleren, entspricht dem h [b durum]
Tetrachordon synnemenon.	D	Nete synnemenon, die letzte der verbundenen Saiten.
	C	Paranete synnemenon, die zweite der verbundenen Saiten.
	B	Trite synnemenon, die dritte der verbundenen Saiten.
Tetrachordon meson.	A	Mese, die mittlere.
	G	Lychanos meson, Anzeiger [index] der mittleren Saiten.
	F	Parhypate meson, zweite der mittleren Saiten.
Tetrachordon hypaton.	E	Hypate meson, tiefe der mittleren Saiten.
	D	Lychanos hypaton, Anzeiger [index] der tiefen Saiten
	C	Parhypate, zweite der tiefen Saiten
	B	Parhypate hypaton, die tiefe der tiefen Saiten
	A	Proslambanomenos, angenommener Ton [vox assumpta].

<145>

Allgemeines diatonisch-chromatisch-enharmonischen System der fünf Tetrachorde:

F	A	B	C	D
Nomina & ordo chordarum.	TETRACHORDA Diatonici generis.	TETRACHORDA Chromatici generis.	TETRACHORDA Enharmonici generis.	
5 Hypate meson. 4 Lychanos Hypaton. 3 Parhypate Hypaton. 2 Hypate Hypaton. 1 Prosambanomenos.				Tetrachordum I. Principalium
4 Mese 3 Lychanos Mese. 2 Parhypate Mese. 1 Hypate Mese.				Tetrachordum II. Mediarum
4 Nete Synneimenon. 3 Parhypate Synneimenon. 2 Trite Synneimenon. 1 Mese.				Tetrachordum III. Coniunctarum.
4 Nete 3 Paranete diezeugmenon. 2 Trite diezeugmenon. 1 Paramese.				Tetrachordum IV. Disiunctarum.
4 Nete 3 Nete hyperboleon. 2 Paranete hyperboleon. 1 Trite hyperboleon.				Tetrachordum V. Acutarum aut Excellentium.

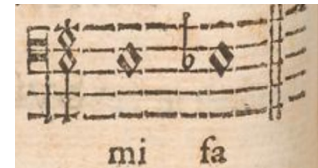
Erklärung und Anwendung der Tabelle

Diese Tabelle hat fünf Spalten. Die erste Spalte F enthält die Bezeichnungen der Saiten der einzelnen Tetrachorde. Die zweite, mit A bezeichnete Spalte enthält die diatonischen Tonstufen, die für die einzelnen Tetrachorde in Musiknoten dargestellt sind. Spalte B enthält die chromatischen Tonstufen für die einzelnen Tetrachorde in Noten dargestellt. Spalte C enthält die enharmonischen Tonstufen für die einzelnen Tetrachorde in Noten dargestellt. Spalte D enthält die Bezeichnungen für die fünf Tetrachorde.

Man sieht also, wie der Verlauf im Tetrachord des diatonischen Tongeschlechts über den Halbton und zwei Ganztöne geht, im chromatischen über zwei Halbtöne und die kleine Terz, im enharmonischen über zwei Diësen und die große Terz.

<146>

In dieser Tafel sieht man, dass die Diatonik ihre Tetrachorde [quartae] so anordnet, dass auf einen kleinen Halbton immer zwei Ganztöne folgen. Die Chromatik ordnet die Tetrachorde so, dass bei den Tönen, die *mi* haben, auch *fa* und andererseits bei denen die *sol* oder *fa* haben, auch *mi* setzen kann.



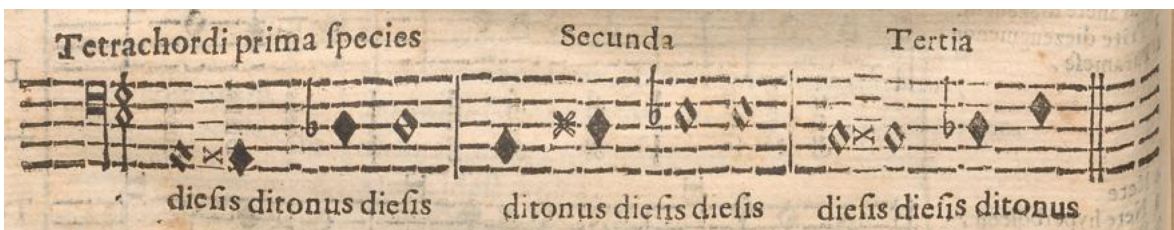
Damit man alle chromatischen Tonstufen einer Quarte oder eines Tetrachords erkennen kann, schien es mir gut, sie hier so darzustellen, wie sie aus der Schatzkammer der modernen [reconditioribus] Theorie entnommen sind.

Die chromatischen Tonstufen eines Tetrachords



Die Enharmonik hat ihre Tetrachorde so aufgebaut, dass der diatonische Halbton in zwei gleiche Teile geteilt wird, die man Diësen nennt, von denen jede zwei Kommata enthält. Darauf folgen zwei Ganztöne oder eine große Terz. Damit steht sie in der Mitte zwischen Chromatik und [Diatonik], wie es das Schema oben deutlich zeigt.

Die Tonstufen eines enharmonischen Tetrachords



Kapitel XIV

Die Arten [de speciebus] der Quarte, Quinte und Oktave²³

§ I

Vom Ganzton

Was ist ein Ganzton?

Der *Ganzton* ist ein musikalisches Intervall, das die Stimme entweder durch eine einzelne Hebung empor- oder durch eine einzelne Senkung herabträgt. Es enthält nach Philolaos und anderen neun Kommata, wovon wir im Vorausgegangenen ausführlich gesprochen haben.

Was ist ein Komma?

Ein Komma ist der kleinste Abstand zwischen zwei Tönen. Zwei davon bilden eine Diësis im enharmonischen Tongeschlecht. Man unterteilt, wie schon gesagt, den Ganzton in einen großen und einen kleinen Halbton. Der kleine besteht aus vier, der große aus fünf Kommata. Zusammengezählt ergeben also neun Kommata einen Ganzton, was man ganz leicht nachprüfen kann, wenn man ein Monochord <147> in neun gleiche Teile teilt (wobei jeder Teil ein Komma darstellt), was aus der Darstellung im Vorausgegangenen deutlich wird.

§ II

Der kleine Halbton

Der Halbton ist die Seele der Musik.

Der kleine Halbton, wie zum Beispiel *mi* zu *fa*, hat eine solche Bedeutung, dass es ohne ihn keine Vielfalt [varietas] in der Musik gäbe. Für den gesamten musikalischen Abwechslungsreichtum ist der kleine Halbton die einzige Ursache. Er allein bildet die unterschiedlichen Formen aller Konsonanzen. Er allein ist die Ursache für die Verschiedenheit der Tongeschlechter. Er allein ist, entsprechend seiner Stellung in den Tetrachorden, der Ursprung des Unterschiedes der Affekte, welche die unterschiedlichen Töne und Tonarten erzeugen. Nähme man ihn weg, müsste alle Musik zugrunde gehen. Je nach Disposition des kleinen Halbtons [pro diversitate dispositionis huius] verändern sich die Konsonanzen. Doch dies wollen wir durch Beispiele erklären.

²³ Mit *species* ist hier sowohl die Art (als Unterart einer Gattung, wie auch die Gestalt und die Erscheinungsform gemeint. Diese Bedeutungsvielfalt ist in der Übersetzung nicht wiederzugeben. Wir schreiben daher in den Überschriften »Art«, verwenden im Text aber gelegentlich »Form« oder »Gestalt«. – Gemeint sind jeweils die Intervallräume.

§ III

Die Arten [species] der Quarte

Was ist eine Quarte?

Die Diatessaron oder reine Quarte umfasst zwei Ganztöne und jeweils einem kleinen Halbton und hat vier Töne, wie zum Beispiel *ut, re, mi, fa*. Da der kleine Halbton, also zum Beispiel *mi-fa*, meist an erster Stelle steht, manchmal an zweiter, gelegentlich an letzter (wie im angefügten Beispiel deutlich wird), gibt es ebensoviele Arten eines konsonanten Intervalls, wie *mi* und *fa* die Stellung wechseln kann. In jedem Intervallraum einer Quarte kann der Halbton dreimal seine Stellung wechseln. Deshalb muss man drei Formen der Quarträume annehmen. Die erste ist die, wenn *mi-fa* an erster, die zweite, wenn *mi-fa* an zweiter, die dritte, wenn *mi-fa* an dritter Stelle steht. Es soll dies eine allgemeine Regel für die Musiker sein, dass es ebensoviele Formen der Konsonanzen gibt wie Töne in der Konsonanz minus eins. Da die Quarte vier Töne hat, bleiben, wenn man eins abzieht, drei Formen der Quarte. Das soll durch die folgenden Beispiele noch klarer werden:



Die schwarzen Noten bezeichnen die kleinen Halbtöne *mi-fa*, die weißen die Ganztöne.

Weil einige wissen, dass es große und kleine Ganztöne gibt, nehmen sie so viele Formen bei der Konsonanz der Quarte an, wie es zwischen dem kleinen Halbton und dem großen und dem kleinen Ganzton Stellungswechsel gibt. Weil man nach den Regeln der Kombinatorik drei Dinge in sechs Weisen miteinander kombinieren kann, vertreten sie die Meinung, dass die Quarte sechs Gestalten [species] habe, wie folgt:

<148>

1. Halbton	großer Ganzton	kleiner Ganzton
2. Halbton	kleiner Ganzton	großer Ganzton
3. großer Ganzton	Halbton	kleiner Ganzton
4. großer Ganzton	kleiner Ganzton	Halbton
5. kleiner Ganzton	großer Ganzton	Halbton
6. kleiner Ganzton	Halbton	großer Ganzton

Wie man sieht, ist die erste Form so gebaut, dass der Halbton an erster, der große Ganzton an zweiter und der kleine Ganzton an dritter Stelle steht. Bei der zweiten Form steht wieder der Halbton an erster, der kleine Ganzton an zweiter und der große an dritter Stelle und so weiter, wie es die Aufstellung zeigt. Wie feinsinnig all das auch sein mag, setzen doch, da man den Unterschied zwischen dem großen und dem kleinen Ganzton kaum wahrnimmt, die meisten nur drei Formen einer Quarte an, wie es im obigen Schema dargestellt ist.

§ IV

Die Arten der Quinte

Die vier Formen der Quinte

Die Diapente oder vollkommene [reine] Quinte besteht aus drei Ganztönen und einem kleinen Halbton. Sie hat also fünf Töne, zum Beispiel *ut, re, mi, fa, sol*. Daher hat nach obiger Regel jeder Quintraum vier Formen oder, was dasselbe ist, in jedem Quintraum können *mi* und *fa* viermal ihre Stellung wechseln, wie folgt. Die schwarzen Noten zeigen wieder die Stellung des Halbtons an, die weißen die der Ganztöne.



Diejenigen, die den Halbton mit dem großen und dem kleinen Ganzton kombinieren, erhalten bei jeder Quinte 24 Kombinationsmöglichkeiten und eben so viele Spezies der Quinte. Da nämlich drei Einzeldinge sechs Kombinationen zulassen, wie es am obigen Beispiel deutlich wurde, erhält man, wenn man sie mit den hier dargestellten vier Formen der Quinte kombiniert, also 6×4 multipliziert, 24 Formen. Da man aber in jeder Quinte zwei gleiche Intervalle findet, teilt man die Kombinationsmöglichkeiten, das heißt 24, durch 2, was zwölf Kombinationsmöglichkeiten ergibt. Mithin sind es zwölf Formen einer Quinte, wie folgt:

1.	großer Ganzton	kleiner Ganzton	Halbton	großer Ganzton
2.	kleiner Ganzton	großer Ganzton	Halbton	großer Ganzton
3.	großer Ganzton	großer Ganzton	Halbton	kleiner Ganzton
4.	großer Ganzton	kleiner Ganzton	großer Ganzton	Halbton
5.	großer Ganzton	großer Ganzton	kleiner Ganzton	Halbton
6.	kleiner Ganzton	großer Ganzton	großer Ganzton	Halbton
7.	Halbton	großer Ganzton	kleiner Ganzton	großer Ganzton
8.	Halbton	großer Ganzton	großer Ganzton	kleiner Ganzton
9.	Halbton	[kleiner] Ganzton	großer Ganzton	großer Ganzton
<149>				
10.	großer Ganzton	Halbton	kleiner Ganzton	[großer] Ganzton
11.	großer Ganzton	Halbton	großer Ganzton	kleiner Ganzton
12.	kleiner Ganzton	Halbton	großer Ganzton	großer Ganzton

Dies sind die Kombinationen der zwölf Formen der Quinte, streng mathematisch betrachtet. Da sie aber kaum Eingang in die Musikpraxis gefunden haben, geht man davon aus, dass die Quinte nur vier Formen hat. Mehr darüber in unsere Rhabdologia der Musurgia.

§ V

Die Arten der Oktave

Die Oktave hat sieben Formen.

Da eine Oktave aus Quinte und Quarte aufgebaut ist, erhält man die Formen der Oktave, wenn man die der Quarte und der Quinte zusammenzählt. Soeben haben wir drei Formen der Quarte und vier der Quinte gefunden. Aus der Addition $3 + 4$ erhält man, was man begehrt: die sieben Formen der Oktave. Um sie zu erklären, benötigt man nur die unten angefügte Aufstellung des Schemas. Daraus erkennt man leicht Lage und Stellung der Formen. Die Stellung des Halbtons haben wir jeweils mit schwarzen Noten gekennzeichnet.

Die sieben Formen der Oktave:



Als nächstes wollen wir die Arten der chromatischen und enharmonischen Quartan, Quinten und Oktaven beschreiben. So wie wir im diatonischen Tongeschlecht drei unterschiedliche Arten der besagten Konsonanzen bestimmt haben, so können wir genau

so viele in <150> der Chromatik und Enharmonik bestimmen, also zwölf unterschiedliche Tonarten, wie man später sehen wird. Da wir oben gesehen haben, dass jede einzelne chromatische Quarte aus zwei Halbtönen – einem großen und einem kleinen – sowie einer kleinen Terz besteht, muss es nach den Regeln der Kombinationskunst sechs Gestalten der chromatischen Quarte geben, und zwar:

Kombinationsmöglichkeiten der Formen einer chromatischen Quarte

1. großer Halbton	kleiner Halbton	kleine Terz
2. kleiner Halbton	großer Halbton	kleine Terz
3. kleine Terz	großer Halbton	kleiner Halbton
4. kleine Terz	kleiner Halbton	großer Halbton
5. großer Halbton	kleine Terz	kleiner Halbton
6. kleiner Halbton	kleine Terz	großer Halbton

Man sieht an dieser Darstellung, dass allein die kleine Terz den gesamten Variationsreichtum des chromatischen Tongeschlechts ausmacht. Wenn einer bei der Quarte des enharmonischen Geschlechts zwei Diësen – eine große und eine kleine – zusammen mit einer Terz ansetzen würde, müsste er in gleicher Weise sechs Formen einer enharmonischen Quarte angeben können. Die große Diësis haben wir oben mit der Proportion 25 : 24 bestimmt, die kleine als 128 : 125. Das kleine chromatische Intervall ist ein großes enharmonisches, wie auch das große chromatische ein kleines diatonisches ist. Wir stellen jetzt die chromatische und die enharmonische Oktave in Noten vor, damit man unsere Worte besser verstehen kann:



Man beachte hier, dass jede enharmonische Note durch den Punkt, der über die Note gesetzt ist, um einen Viertelton oder eine Diësis erhöht wird. So ist zum Beispiel die zweite Note höher als die erste, und zwar um eine Diësis. Das gilt auch für die anderen. Bei der chromatischen Oktave erniedrigt das b den Ton um einen Halbton. Würde jemand die Oktave in 24 Diësen einteilen, könnte dies durch solche Noten nicht dargestellt werden, sondern das System einer diatonisch-chromatisch-enharmonischen Oktave würde wie folgt aussehen müssen:

Tonstufen des Systems einer diatonisch-chromatisch-enharmonischen Oktave:



<151>

Kapitel XV

Die musikalischen Modi

Wie verschieden die Meinungen der Alten über die Modi, ihre Natur und Eigenart sind, so verschieden sind sie auch über ihre Ordnung, Stellung und ihren Aufbau.

Verschiedene Meinungen über die musikalischen Modi

Platon setzte an erste Stelle den mixolydischen Modus [Lydias mistas], mit dem er den hohen lydischen verknüpfte. An zweite Stelle setzte er den ionischen, an die dritte den dorischen und phrygischen. Dass er diese Aufstellung aber nicht festgelegt hat, um eine natürliche Ordnung zu signalisieren, sondern nur arbiträr, wird daraus klar, dass er an anderer Stelle die angeführte Ordnung veränderte: Er setzte dann an die erste Stelle den ionischen Modus, den lydischen an die zweite und danach erst den phrygischen.

Ptolemaios und Boethius bewahrten bei der Anordnung der Tonoï folgende Ordnung: Sie setzten das Hypodorische an die erste Stelle, unterhalb aller anderen. In die Höhe setzten sie über alle anderen das Mixolydische und Hypermixolydische. Dann setzten sie über das Hypodorische das Hypophrygische, danach das Hypolydische, dahinter das Dorische, dann unmittelbar das Phrygische. Apuleius stellte an die erste Stelle das Äolische und danach das Ionische, dann der Reihe nach die anderen. Martianus Capella platzierte zuerst das Lydische, danach das Ionische und darauf die anderen. Es gab auch solche, die an erste Stelle das Mixolydische setzten wie zum Beispiel Euklid und Gaudentius. Iulius Pollux setzte zusammen mit Plutarch und Cassiodor das Dorische, Lucian das Phrygische an die erste Stelle.

Häresien in der Musik

Aus dieser größtmöglichen Verwirrung entstanden auch die bedeutendsten Abspaltungen [haereses] in der Wissenschaft der Musik, von denen die Autoritäten besonders zwei herausstellen: Die erste war die von Pythagoras, die zweite die von Aristoxenos. Beide hatten schier unzählige Anhänger, so dass man kaum einen Durchblick gewinnt, wenn man ihnen folgen will.

Um uns aus dieser großen Verwirrung zu befreien, muss, wie wir glauben, in der Wissenschaft der enharmonischen Ordnung größte Sorgfalt angewendet werden. Wir wollen also zunächst erklären, was ein Modus und was ein Tonus ist. Zweitens erklären wir, wie sie entstanden und abgeleitet sind. Drittens besprechen wir ihre Anordnung durch die Alten

bei der Darstellung der Tonoι. Viertens die Abweichung (von den Modi der Alten) durch die modernen Musiker in unserer Zeit. Fünftens sprechen wir über den Ursprung der Modi und über ihre jeweilige Natur.

Definition des Modus

Was ist ein Modus?

Ein musikalischer oder harmonischer Modus, griechisch τρόπος [trópos], was »Figur« bedeutet, ist nichts anderes als eine bestimmte Art und Weise, gewisse musikalische Zusammenklänge zu bilden, die von Anfang bis Ende dafür eingerichtet ist, eine bestimmte Gleichheit des Auf- und Abstiegs und Zusammenklänge, welche Affekte bilden, zu schaffen. Anders gesagt: Modi oder Oktavgattungen sind Gattungen der Harmonie, welche aus den sieben Formen der Oktave, die entsprechend der Teilung und Verknüpfung von Quarte und Quinte entstehen, hervorgehen und dazu dienen, unterschiedliche Affekte und Bewegungen des Herzens auszudrücken. Glarean vergleicht sie mit einem Fluss, der einmal wasserreich, dann wasserarm und dann wieder überschäumend ist. Die Modi sind Grund und Ursprung [causa et origo] für all den Reichtum der Harmonie, sie bewirken in der Musik dasselbe, was in der Dialektik die Figuren der Syllogismen bewirken. Wie nämlich in der Philosophie kein ordentlicher Diskurs ohne eine kunstvolle, variationsreiche Anordnung der Syllogismen geführt werden kann, so wird man auch in der Musik ohne eine kunstvolle Anordnung der Modi nichts Anständiges hervorbringen. Wer also einen Gesang ohne einen bestimmten Modus komponiert, gebraucht einen Syllogismus ohne Figur. Die Modi sind ferner dasselbe, was in der Malerei die richtige Verteilung der Farben ist und das richtige Verhältnis der Glieder zueinander. Dasselbe, was in der Natur der Dinge die Einordnung der einzelnen Arten in ihre Gattungen ist, das sind in der Musik die Modi. Doch mehr dazu im Folgenden.

<152>

Kapitel XVI

Etymologie, Anzahl und Reihenfolge der Modi

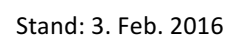
Die erwähnten Modi wurden nach den verschiedenen Ländern benannt, in denen sie benutzt wurden. Deshalb haben die Lydier die Gattung, die sie am meisten anwendeten, die »lydische« genannt, die Phrygier ihre Gattung »phrygisch«, die Dorier ihre »dorisch«, die Äolier ihre »äolisch«, die Ionier ihre »ionisch« und so weiter. Wie sich nämlich diese Völker in ihrer Sprache und ihren Sitten voneinander unterschieden, so auch in den musikalischen Modi: Jedes Volk benutzte die Modi, die am besten zu seiner Natur passten, oder, um es noch besser zu sagen, es benutzte die Modi, die zu ergreifen es seine Natur einlud und antrieb. Siehe dazu unsere musikalische Physiologie.

Nachdem gemäß der verschiedenen Arten [species] der Oktave auch verschiedene Modi entstanden sind, teilte man einem jeden der [bereits] erwähnten [Modi] noch einen untergeordneten Modus zu. So entstanden der »hypolydische«, der »hypodorische«, der »hypophrygische«, der »hypomixolydische«, der »hypoäolische« und der »hypoionische« Modus, dem man noch den »ionischen« und den »hypoionischen« hinzufügte. So haben sich also gemäß der Verdopplung der sieben Oktavformen 14 Formen herausgebildet: mehr dazu in unserer Melopoeia [lib. V]. Die Alten haben in ihrem ungelehrten Zeitalter nur drei festgesetzt: den lydischen, dorischen und phrygischen Modus. In den folgenden gelehrteren Jahrhunderten haben sich aus den dreien sieben entwickelt, also der hypodorische, hypophrygische, hypolydische, dorische, phrygische, lydische und mixolydische. Welche in der Reihe nun der erste, zweite oder dritte ist – niemand hätte das bisher bestimmen können. Unter den Autoren gibt es große Meinungsverschiedenheit, so dass man kaum durchschauen kann, welchem Modus man den ersten Rang zuschreiben muss. Einige glaubten, die Reihenfolge von der der sieben Oktavgattungen übernehmen zu müssen. Da aber jede von ihnen [den Oktavgattungen] den ersten Platz einnehmen könnte, kann ich nicht erkennen, wie man ihre Meinung stützen könnte. Wir wollen trotzdem ihre Vorgehensweise betrachten.

Die Aufteilung der Formen der Oktave

Die erste Form der Oktave setzten sie von B *mi* bis b *mi* an, also von Hypate hypaton bis zur Paramese, und nannten sie die myxolydische. Die zweite führten sie von C *fa* bis C *sol fa ut*, also von Parhypate hypaton bis Triten diezeugmenon, und nannten sie die lydische Form. Die dritte nahmen sie von D *sol re* bis d *la sol re*, also von Lychanos hypaton bis Paranete diezeugmenon, und nannten sie die phrygische. Die vierte von E *la mi* bis e *la mi*, also von Hypate meson bis Nete diezeugmenon, und nannten sie die dorische. Die fünfte setzten sie an von F *fa ut* bis f *fa ut*, d. h. von Parhypate meson bis Triten hyperbolaion, die sie hypolydisch nannten. Die sechste von G *sol re ut* bis g *sol re ut*, also von Lychanos meson bis Paranete hyperbolaion: die hypophrygische. Die siebte endlich von a *la mi re*, d. h. von Mese bis Nete hyperbolaion: die hypodorische. In dieser Reihenfolge haben die meisten verständigen Musiker der Alten die Formen einer Oktave aufgezählt. Sie stellten dies in einem System von 15 Saiten, das sie »vollständig« [perfectum] nannten, oder (was das gleiche ist) in der Doppeloktave dar, was in der nachstehenden Darstellung deutlich wird. Wir haben sie hier wiedergegeben, damit der eifrige Leser es mit einem Blick erfassen kann, falls ihm das bisher Gesagte vielleicht noch etwas undeutlich ist. Damit auch der ausübende Musiker die theoretischen Vorstellungen der Alten leichter erfassen kann, haben wir zu den einzelnen Saiten, die die sieben Formen der Oktave darstellen, die Musiknoten hinzugesetzt, damit wir nicht in Verdacht geraten, etwas auszulassen, was zur Kenntnis des Gesagten hinführt.

100



Bei den Alten wurde vor allem das hypodorische System benutzt.

Zu obiger Darstellung muss man anmerken, dass für die Alten allein das hypodorische System unter allen das gemeinsam verbindliche und das am meisten natürliche war. In ihm braucht man, anders als bei den anderen, keinerlei Einbildungskraft, sondern es schreitet ohne jede Veränderung einfach und natürlich fort. Wenn jemand mit einem tieferen Ton als im hypophrygischen System beginnen wollte, also zum Beispiel mit G *sol re ut*, musste er nur im Kopf die besagte Saite G oder, was dasselbe ist, Lychanos meson an die Stelle des Proslambanomenos oder A *re* transponieren, und G als *ut* anstimmen – keineswegs aber als *re*, welche Silbe auch zu A gehört. Das heißt, er musste das hypodorische System um einen Ton oder um das A *re*, den Ton Proslambanomenos, höher transponieren, so dass der besagte Ton zu B *mi* im hypodorischen System gleichklingend ist. Anschließend fuhr man in der Reihenfolge der weiteren Töne bis zu Nete hyperboleon fort, dem letzten Ton im System. All dies wird man leichter aufnehmen, wenn man sich die Spalten der obigen Darstellung nebeneinander aufschreibt und sie in eine solche Reihenfolge bringt, wie man es in der Darstellung sieht. Mehr dazu in unserer Rabdologia der Musurgia.

Kapitel XVII

Die modernen Modi

Die modernen Musiker kannten die verschiedenen Formen der Quarten, Quinten und Oktaven und wussten, dass die Oktave, wie man oben gesehen hat, aus Quarte und Quinte zusammengesetzt ist. Sie wussten auch, dass je nach Stellung des Halbtons unterschiedliche Arten der Modulation entstehen, weil nämlich durch die Veränderung der Stellung des Halbtons die Oktave sieben Formen annehmen kann. Aus diesen Gründen definierten sie sieben Tonarten. Weil sich diese sieben Verteilungsmöglichkeiten aber zudem in der harmonischen oder arithmetischen Disposition unterscheiden, haben sie sieben weitere Skalen gebildet, so dass es insgesamt 14 Skalen sein sollten. Da jedoch bei zweien entweder der Tritonus oder die verminderte Quinte vorkamen, wurden sie gestrichen. So behielten sie zwölf richtige Gattungen, die wir alle ausführlich in dem Buch zur Symphoniurga beschreiben werden, wohin wir den Leser verweisen.

Was ist die arithmetische, was die harmonische Anordnung?

Da die Musiker weiterhin vermerkten, dass die Oktave in Quinte und Quarte geteilt ist, und wahrnahmen, dass die Verbindung der Quinte mit der Quarte manchmal angenehme und wohlklingende, bald aber auch unangenehme und raue Klänge verursachte – ein Wohlklang [εὐφωνίαν], wenn die Quinte unterhalb der Quarte platziert war, ein Missklang [κακοφωνίαν], wenn die Quarte unterhalb der Quinte war – nannte man die zweite Form »arithmetische«, die erste »musikalische« Verteilung. Denn die Zahlenwerte der Proportionen, welche diese Verbindung von Quinte und Quarte ausdrücken, sind 6 : 4 : 3. Sie liegen in der harmonischen Proportionalität: Der mittlere Wert teilt nämlich die beiden äußeren so, wie es für die auf natürliche Weise geordneten Saiten passt. Da die andere Verteilung ihre Zahlenwerte 4 : 3 : 2 gemäß der arithmetischen Proportion hat und da ihre

Saitenaufteilung eher willkürlich ist als natürlich, erzeugt sie eine viel weniger taugliche Konsonanz als die erste Disposition. Wann immer die Oktave auf die erste Art angeordnet ist, kann man sie »harmonisch geteilt« nennen. Ist sie auf die zweite Art geteilt, muss man sie »arithmetisch [geteilt]« nennen. Gleiches lässt sich zur Teilung der Quinte in Tritonus und kleine Terz sagen.²⁴ Man sehe sich die Darstellung dieser Anordnung an, die unten angefügt ist:



<155>

Pragmatia I

Wie man aus den sieben Formen [species] der Oktave die Modi bestimmt

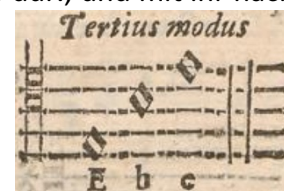
1. Wir wollen uns kurz ansehen, wie aus den sieben Formen der Oktave 14 Tonarten oder Modi hervorgehen. Wenn wir aber als erste Form der Quinte diejenige nehmen, die von D nach A verläuft, und darüber die erste Form der Quarte setzen, die von a nach d verläuft, erhalten wir notwendig aus dieser Vereinigung den ersten Modus, der enthalten ist in der vierten Form der Oktave zwischen D und d.



2. Wenn wir dieselbe erste Form der Quinte mit derselben ersten Form der Quarte verbinden, aber so, dass die Quarte *unter* die Quinte gesetzt wird in Richtung des tieferen Klangs, entsteht daraus notwendig der zweite Modus, der innerhalb der ersten Form der Oktave, das heißt: zwischen a und A, enthalten ist. Zur Form von Quinte und Quarte steht mehr im Anhang zu diesem Buch.



3. Wenn wir als zweite Form der Quinte diejenige zwischen E und e dur., und mit ihr nach oben hin die zweite Form der Quarte, die zwischen b und [e], hinzufügen, entsteht der dritte Modus, der innerhalb der fünften Form der Oktave zwischen E und e liegt.



²⁴

Der Inhalt dieses Satzes ist unklar.

4. Wenn wir nun der besagten Quinte dieselbe Quarte in Richtung des Proslambanomenos hinzufügt, also die zwischen E und $\flat$ [b durum], entsteht dadurch die zweite Form der Oktave zwischen $\flat$ und $\flat$, *mi*. Daraus ergibt sich ein von den vorigen verschiedener Modus, nämlich der vierte.



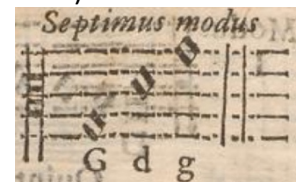
5. Wenn wir nun die dritte Form der Quinte nehmen, die zwischen F und C liegt, und über sie die dritte Form der Quarte setzen (die zwischen C und F), erhalten wir die sechste Form der Oktave: die zwischen F und f, die wir den fünften Modus nennen.



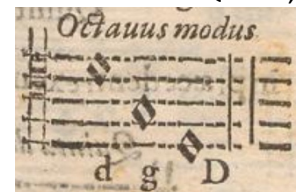
6. Wenn wir unter die soeben genannte Form der Quinte die besagte Form der Quarte zwischen F und C anfügen, erhalten wir die dritte Form der Oktave und nennen dies den sechsten Modus zwischen C und C.



7. Wenn wir die vierte Form der Quinte nehmen (die zwischen G und d) und sie mit der ersten Form der Quarte zwischen d und g vereinigen, erhalten wir die siebte Form der Oktave, die wir den siebten Modus nennen.



8. Nehmen wir nun die zwischen G und D gelegene Quarte und setzen sie unter die Quinte, entsteht die Oktave d bis D, die vierte Oktavform, der achte Modus.



9. Wenn wir die zweite Form der Quarte zwischen e und a mit der ersten Form der Quinte zwischen a und e vereinigen, entsteht innerhalb der ersten Form der Oktave zwischen a und aa der Modus, den wir den neunten nennen.



<156>

10. Wenn wir unter diese Quinte dieselbe Form der Quarte zwischen e und aa setzen, bilden wir damit die Oktave zwischen e und E, die wir als zehnten Modus bezeichnen.



11. Wenn wir die dritte Form der Quarte zwischen [g] und cc mit der vierten Form der Quinte zwischen c und g verknüpfen, entsteht die dritte Form der Oktave zwischen c und cc, das ist der elfte Modus.



12. Wenn wir schließlich die eben erwähnten Formen umgekehrt setzen, so dass die Quarte zwischen c und G liegt, erhalten wir den letzten, den zwölften Modus, der, wie man sieht, innerhalb der siebten Form der Oktave zwischen g und G liegt.



Da wir weiterhin gesehen haben, dass zwei der sieben Modi entweder einen Tritonus oder die verminderte Quinte haben, missklingende Intervalle, unerlaubte gar, bleiben nach ihrer Beseitigung noch zwölf Formen, wie oben bereits gesagt und wie es am Beispiel in der Darstellung deutlich wird.



Pragmatia II

Wie man die zwölf Modi durch die zweifache Teilung, die harmonische und die arithmetische, bestimmt

Im Vorausgegangenen haben wir gezeigt, wie man eine Oktave entweder harmonisch oder arithmetisch teilt. Jetzt ist zu zeigen, wie man mit Hilfe dieser Teilung die zwölf Modi findet.

1. Wenn jemand die vierte Form der Oktave zwischen D und d nimmt und sie im Ton a harmonisch in zwei Teile teilt, entsteht notwendig der erste Modus, da durch die Teilung der erste Teil die Quinte, der zweite die Quarte ist. Der erste Teil liegt zwischen D und a, ist also die erste Form der Quinte. Der zweite Teil liegt zwischen a und d, ist also die erste Form der Quarte. Es ist klar, weshalb in der vorliegenden Darstellung der erste Modus entsteht.



2. Wenn jemand danach die fünfte Form der Oktave nimmt und sie wie eben harmonisch teilt, entstehen die zweiten Formen von Quinte und Quarte, die beide durch $\flat$ [b durum] geteilt sind. Die erste liegt zwischen E und $\flat$, die zweite zwischen $\flat$ und e, und gemeinsam bilden sie den dritten Modus.

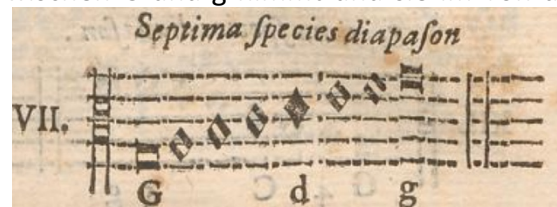


<157>

3. Wenn wir die sechste Form der Oktave nehmen, die zwischen F und f, und sie im Ton c harmonisch teilen, erhalten wir aus den vereinigten Teilen notwendig den fünften Modus, wie oben gesagt.



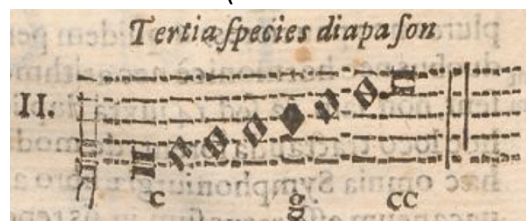
4. Wenn jemand die siebte Form der Oktave zwischen G und g nimmt und sie im Ton d harmonisch teilt, erhält er die vierte Form der Quinte G–d. Verknüpft er diese mit der ersten Form der Quarte zwischen d und g, entsteht notwendig der siebte Modus, siehe oben.



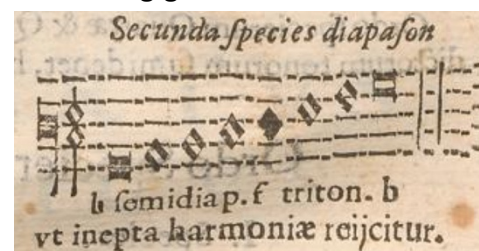
5. Nehmen wir die erste Form der Oktave zwischen a und aa, teilen sie harmonisch, erhalten wir die erste Form der Quinte zwischen a und e und die zweite der Quarte zwischen e und aa. Beide vereint ergeben den neunten Modus.



6. Nimmt man die dritte Form der Oktave zwischen c und cc (die zweite Oktavform zwischen b und bb lassen wir hier aus, da man sie nicht harmonisch teilen kann) und teilt sie in dem gekennzeichneten Ton g, erhält man die vierte Form der Quinte zwischen c und g und die dritte Form der Quarte zwischen g und cc. Zusammen ergeben sie den elften Modus.

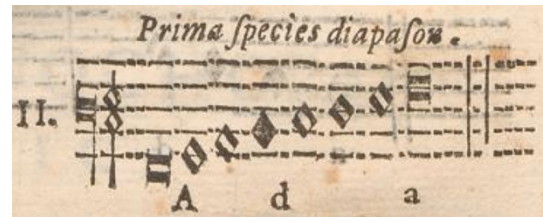


Hier sieht man, wie man sechs Modi durch harmonische Teilung gewinnt und auf welche Weise ein Modus nicht harmonisch teilbar und deshalb unbrauchbar ist, da in der zweiten Oktavform ja eine verminderten Quinte und ein Tritonus stehen. Aber das wird alles aus der angefügten Darstellung klar.

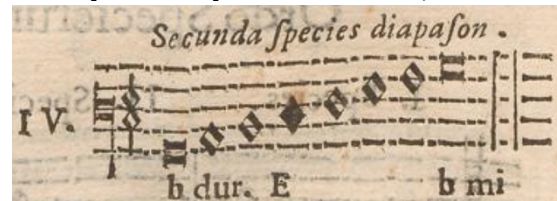


Die anderen sechs Modi finden wir durch arithmetische Teilung.

1. Nehmen wir die erste Oktavform zwischen A und a, teilen sie arithmetisch im D und erhalten die erste Form der Quarte zwischen d und A, legen sie unter die erste Form der Quinte zwischen a und d: Dann ergeben beide vereint den zweiten Modus.



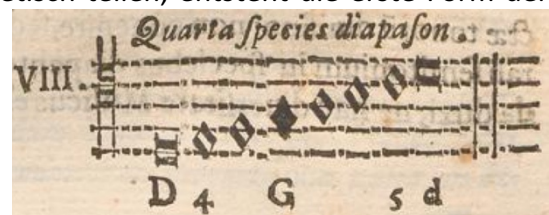
2. Wenn wir die zweite Form der Oktave zwischen $\flat$ [b durum] und $\flat$ nehmen, sie arithmetisch im E teilen, kommen wir zwischen E und $\flat$ zur zweiten Form der Quarte und zwischen $\flat$ und E zur zweiten Form der Quinte, die zusammen den vierten Modus bilden.



3. Man teilt die dritte Oktavform [C–c] arithmetisch im F, so dass die dritte Form der Quarte F–C unter die dritte Form der Quinte c–F gesetzt wird, und wir haben den sechsten Modus.



4. Wenn wir die vierte Oktavform im G arithmetisch teilen, entsteht die erste Form der Quarte G–D und mit g–D die vierte Form der Quinte, die zusammen den achten Modus von D nach d bilden.



<158>

5. Wir nehmen die fünfte Form der Oktave von e nach E, teilen sie arithmetisch im a und erhalten die zweite Form der Quarte von a nach E sowie die erste Form der Quinte von e nach a, die zusammen den zehnten Modus bilden.



6. Nehmen wir schließlich die siebte Form der Oktave zwischen g und G, teilen sie durch C, ergibt das zwischen C und G die dritte Form der Quarte, die, mit der vierten Quintenform vereinigt, den zwölften Modus darstellt, wie man sieht.



Die sechste Oktavform zwischen F und f wird von den Musikern wie eine Feindin verworfen, weil sie nicht arithmetisch im $\flat$ geteilt werden kann, da sich, wie man sieht, ein Tritonus ergibt.

Es gibt zwölf Modi.

So erkennt man, wie wir durch arithmetische Teilung sechs weitere Modi gefunden haben, so dass also insgesamt zwölf gebildet werden können, nicht mehr und nicht weniger: nämlich sechs durch harmonische, sechs durch arithmetische Teilung, während zwei, die weder harmonisch noch arithmetisch teilbar sind, verworfen werden. Wären diese doch teilbar, könnte man 14 statt zwölf Modi bilden, entsprechend der Verdopplung der sieben Oktavgattungen. Vieles müsste an dieser Stelle noch behandelt werden, so etwa authentische und plagale Modi und die Natur der Modi, doch weil wir dies dem Buch über die Symphoniurga und anderen Teilen dieses Werkes vorbehalten haben, scheint es uns überflüssig für die Wiederholung dieser Themen Zeit zu verlieren.

Hier folgt jetzt noch eine Aufreihung der Formen von Quarte und Quinte nebst der Methode, mit der die besagten Modi geteilt werden müssen.



Man beachte, dass wir hier die Reihenfolge der Formen von Quarte und Quinte nicht nach der besagten Teilungsmöglichkeit für die Modi gewählt haben. Wir wollten stattdessen nur die Reihenfolge zeigen, mit der in der natürlichen Progression der Halbton bei den Formen von Quarte und Quinte seine Stellung wechselt. Dies glaubten wir erklären zu müssen, damit kein Musiker durch diesen Unterschied einem Irrtum verfällt.